Algebra I – podzim 2023 – 3. termín

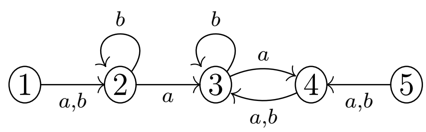
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Nechť H_n značí množinu všech homomorfismů $(\mathbb{Z}_n, +)$ do $(\mathbb{Z}_n, +)$. Pro každý z následujících tří případů rozhodněte, zda předpis

$$(f, [k]_{30}) * (g, [\ell]_{30}) = (p, [k \cdot \ell]_{30}), \text{ kde } p([a]_n) = f([a]_n) + k \cdot g([a]_n),$$

pro $a, k, \ell \in \mathbb{Z}$, korektně definuje operaci na množině $H_n \times G$ takovou, že $(H_n \times G, *)$ je pologrupa/grupa.
1) $n = 90$ a G obsahuje právě invertibilní prvky monoidu $(\mathbb{Z}_{30}, \cdot)$.
2) $n = 10$ a G obsahuje právě invertibilní prvky monoidu $(\mathbb{Z}_{30}, \cdot)$.
3) $n = 10$ a $G = \mathbb{Z}_{30}$.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & f & h \\ 0 & q & g \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f, g \in \mathbb{R}[x],\ h \in \mathbb{C}[x] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} p & f & h \\ 0 & q & g \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \in G \,\middle|\, q \in \{p, -p\},\ h(2) - h(-2) \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $2 - \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{4 + 2\alpha^2 + \alpha^3}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 8\alpha = -2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu a jeho dvou různých podokruhů, které jsou izomorfní.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy takové, že řády jejích prvků jsou právě 1, 2 a 3.

8. **(5 bodů)** Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálního typu.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je hlavní.