Algebra I – podzim 2023 – 4. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

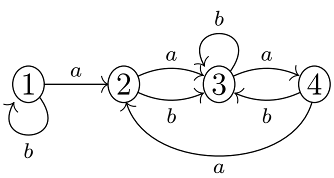
1. **(10 bodů)** Pro každou z následujících pěti podmínek rozhodněte, zda korektně definuje podmnožinu I okruhu $(\mathbb{Z}_{100}[x], +, \cdot)$, která tvoří

   • ideál v $(\mathbb{Z}_{100}[x], +, \cdot)$, • podgrupu v $(\mathbb{Z}_{100}[x], +)$, • podpologrupu v $(\mathbb{Z}_{100}[x], \cdot)$.

   Přitom polynom $\sum_{i=0}^{\infty} [z_i]_{100} \cdot x^i$, kde $z_i \in \mathbb{Z}$, patří do I právě tehdy, když

   (a) $z_0 \mid z_1$ v $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$,
   (b) $[z_0]_{100} \mid [z_1]_{100}$ v $(\mathbb{Z}_{100}, +, \cdot)$,
   (c) $[z_0]_{100} = [4k]_{100}$, $[z_1]_{100} = [6\ell]_{100}$ pro nějaká $k, \ell \in \mathbb{Z}$,
   (d) $[z_0]_{100} = [6k]_{100}$, $[z_1]_{100} = [4\ell]_{100}$ pro nějaká $k, \ell \in \mathbb{Z}$,
   (e) $[z_0]_{100} = [z_1]_{100} = [10k]_{100}$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & r \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ r \in \mathbb{Z}[\sqrt[4]{2}] \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \cdot c & d \\ 0 & 1 & c + 2k\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; c, d \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo
$$\frac{1}{\alpha^4 + 20\alpha + 4}$$
bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $2\alpha^2 = \alpha^4 + 14\alpha + 2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu R, který má více než dva prvky, a homomorfismu $\varphi\colon R \to R$ takového, že pro právě dva prvky r okruhu R platí $\varphi(r) = r$.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad surjektivního homomorfismu $\varphi\colon S \to G$, kde S je pologrupa, která není monoid, a G je nekonečná grupa.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh a jeho charakteristiku.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. **(10 bodů)** Přímo z definic tělesa a oboru integrity dokažte, že konečná tělesa jsou právě konečné obory integrity.