Logika. Výroková logika

Luboš Popelínský

E-mail: popel@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Logika a umělá inteligence. Logický agent
- Výroková logika
- Splnitelnost
- Normální formy
- Pravdivost v interpretaci a logická pravdivost
- SAT problém

... místo úvodu

You can think about deep learning as equivalent to ... our visual cortex or auditory cortex. But, of course, true intelligence is a lot more than just that, you have to recombine it into higher-level thinking and symbolic reasoning, a lot of the things classical AI tried to deal with in the 80s. ... We would like to build up to this symbolic level of reasoning - maths, language, and logic. So that's a big part of our work.

Demis Hassabis, CEO and co-founder of Google Deepmind

... místo úvodu

You can think about deep learning as equivalent to ... our visual cortex or auditory cortex. But, of course, true intelligence is a lot more than just that, you have to recombine it into higher-level thinking and symbolic reasoning, a lot of the things classical AI tried to deal with in the 80s. ... We would like to build up to this symbolic level of reasoning - maths, language, and logic. So that's a big part of our work.

Demis Hassabis, CEO and co-founder of Google Deepmind

Příklad

Pokud X + Y = 10 a X - Y = 4, kolik je X?

jak řešit

- prohlédavat prostor všech možných řešení např. do hloubky, kontrolovat platnost obou omezujících podmínek
- CSP (Constraint Satisfaction problem) s proměnnými X a Y,
- sečíst obě rovnice a vydělit 2.

Použili jsme operace zachovávající pravdivost
tj. odvozování založené na logice, logickou inferenci

O krok zpět

(zjednodušený) kognitivní proces:

data $\rightarrow$ UČENÍ $\rightarrow$ model

dotaz $\rightarrow$ INFERENCE pomocí modelu $\rightarrow$ odpověď

O krok zpět

(zjednodušený) kognitivní proces:

data $\rightarrow$ UČENÍ $\rightarrow$ model INDUKCE

dotaz $\rightarrow$ INFERENCE pomocí modelu $\rightarrow$ odpověď DEDUKCE

INDUKCE odvozuje generalizaci z dat, např. pravidla,
DEDUKCE odvozuje logicky platný závěr na základě těchto pravidel

Zde se soustředíme na na DEDUKCI, tj. na INFERENCI metodami logiky,

Příklad: Eukleidův axiomatický systém pro geometrii

Logika

dva cíle

- reprezentovat znalosti o doméně
- umět odvozovat na základě těchto znalostí
- logika = nástroj pro odvozování důsledků z předpokladů

Logický agent

- Znalostní báze (knowledge base, KB) = množina vět ve formálním jazyce
- Deklarativní přístup k tvorbě agenta
  - Tell it what it needs to know (or have it Learn the knowledge)
  - Then it can Ask itself what to do—answers should follow from the KB
  - pomocí inferenčního mechanismu
- Znalostní systém může odpovědět v principu na libovolnou otázku (podle KB)
- na rozdíl např. od prohledávacích algoritmů, kde typická otázka je "jak se dostat z A do B"

Logický agent

function KB-AGENT(*percept*) *# vrací akci*
 # globální: KB – báze znalostí; t – číslo, na začátku 0
    tell (*KB*, **make_percept_sentence**(*percept*, *t*))
    action $\leftarrow$ **ask**(*KB*, **make_action_query**(*t*))
    tell (*KB*, **make_action_sentence**(*action*, *t*))
    $t \leftarrow t+1$
    return *action*

Příklad

Ex.: Pokud X + Y = 10 a X - Y = 4, kolik je X?

KB-AGENT

Pravidla do znalostní báze

- if ((A=B) and (C=D)) then add((A+C)=(B+D))
- if (n*X=B) then add(X=B/n)

Inferenční mechanismus - např. forward chaining (fix point semantics)

Logický agent

Otázky

- jaký jazyk použít
- co musí obsahovat KB
- jaký má být inferenční mechanismus
- existuje pro každou z těchto otázek minimální varianta?
- k čemu je užitečný

nejprve pro výrokovou logiku

Historia Magistra Vitae ... ?

https://www.britannica.com/topic/history-of-logic

- filozofická logika
  - Thalés z Milétu - geometrické věty a důkazy
  - Aristoteles - první formální systém, princip sporu, princip vyloučení třetího
  - Euklides - axiomy, větz, první axiomatický systém
  - stoikové 3.stol. př.n.l. - základy výrokové logiky
- počátky symbolické logiky (13.- 19. století)
  - J. Duns Scotus - z dvou odporujících si tvrzení plyne cokoliv
  - W. Ockham - odlišil tvrzení a odvozovací pravidlo
  - G. W. Leibniz - idea logického kalkulu pro exaktní vědy
  - B. Bolzano - operace odvoditelnosti, kvantifikátory
  - G. Boole - Boolova algebra, fomální logika v moderním slova smyslu

20. století

- matematická logika
  - G. Frege, přelom století - axiomatizace výrokové logiky
  - B. Russell, 1918 - objasnění paradoxu lháře
  - C.S.Lewis, J.Lukasiewicz - neklasické logiky
  - D. Hilbert, W. Ackermann - axiomatizace predikátového počtu
  - úplnost výrokové (Post 1921) a predikátové (Goedel 1930) logiky
  - K. Goedel - neúplnost systémů obsahujících aritmetiku, omezená možnost důkazu bezespornosti
  - A.Church, 1936 - nerozhodnutelnost predikátové logiky
  - A. Turing, 1937 - pojem vyčíslitelnosti, Turingův stroj
- logika v informatice, v AI, výpočtová logika
  - verifikace programů
  - binary decision diagrams
  - znalostní systémy
  - logické programování
  - ...

Historia Magistra Vitae ... !

- filozofická logika
  - ...
  - **Euklides - axiomy, věty, první axiomatický systém**
  - ...
- počátky symbolické logiky (13.- 19. století)
  - ...
  - **G. Boole** - Boolova algebra, formální logika v moderním slova smyslu, ale též he wrote a new book on The Laws of Thought with two parts: Logic + Probability
  - ...
- matematická logika (konec 19. až polovina 20. stol.)
  - ...
  - **A. Turing**, 1937 - pojem vyčíslitelnosti, Turingův stroj, **kolem 1950 - induktivní inference**
  - ...

Informační zdroje

Logical Agents. In Russell and Norvig. AI. A Modern Approach

Anil Nerode, Richard A. Shore, Logic for Applications. Springer Verlag.
základní kniha, mnohokrát v knihovně FI

Logic and Artificial Intelligence. In: Stanford Encyclopedia of Philosophy
https://plato.stanford.edu/entries/logic-ai/

Klasifikace logik

- formální (co je poznané, definované; metody odvozování)
- neformální, mentální (co je poznatelné; zdravý selský rozum, komunikace mezi lidmi, heuristické odvozování)

Formální logika

- dvouhodnotová - true, false, i vícehodnotová
- extensionální - pravdivost formule závisí jen na pravdivosti jejich složek
- intesionální - nejen na psti složek - "možná", "věřím"

Dvouhodnotová extensionální logika zde

- výroková *Jestliže bude pěkně a nebudu učit, půjdu hrát tenis.*
  $p \land \neg q \Rightarrow r$
- predikátová
  - 1. řádu *Není pravda, že všichni lidé jsou spokojení*
    $\neg \forall x : (\text{ člověk}(\text{x}) \Rightarrow \text{spokojený}(\text{x}))$
  - 2. řádu *Existuje vlastnost, kterou mají všichni lidé*
    $\exists P \forall x : (\text{ člověk}(\text{x}) \Rightarrow \text{P}(\text{x}) \,)$

Výroková logika. Syntax

- abeceda
  1. výrokové symboly: $p, q, r, s, \ldots$, případně $p_1, p_2, p_3 \ldots$
  2. symboly pro spojky: $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, ...
  3. pomocné symboly: $(,)$
- správně utvořená formule (dále jen formule)
  1. každý výrokový symbol je formule (tzv. atomická formule)
  2. je-li výraz A formule, pak $\neg(A)$ je formule
  3. jsou-li výrazy A, B formule, pak také $(A) \vee (B)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \Rightarrow (B)$, $(A) \Leftrightarrow (B)$, ... jsou formule
  4. ... a případně pro další spojky ...
  5. nic jiného není formule
- není definována priorita binárních operátorů
- závorková konvence: závorky lze vynechat, pokud to není na újmu jednoznačnosti formule

K logickým spojkám

- nulární pravdivostní funkce (nezávislé na žádném argumentu) jsou konstanty odpovídající pravdivostním hodnotám 0, 1
- unární (jednoargumentové) spojky: F_1 – unární verum, F_2 – unární projekce p, F_3 – negace p (ozn. $\neg p$); F_4 – unární falsum.
- binární – $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ...
- ternární – ternární $\wedge$, ... , if X then Y else Z
- ...

Úplný systém logických spojek

U každého jazyka nás zajímá nejen jeho expresivita (síla vyjádření).
Existuje minimální dostatečná množina spojek?

- prostřednictvím systému spojek $\{\neg, \wedge, \vee\}$ dokážeme vyjádřit libovolnou spojku.
- množinu spojek s touto vlastností nazýváme úplným systémem spojek
- další úplné systémy např. $\{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{\neg, \Rightarrow\}$
- jednoprvkové úplné systémy: Shefferova funkce NAND (negace konjunkce), Nicodova funkce NOR (negace disjunkce)
  Př. $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \mid p) \mid (q \mid q))$

Umíme systematicky hledat úplné systémy spojek?
Jaké vlastnosti musí mít úplné systémy spojek?
https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_completeness

Sémantika. Interpretace

- Pravdivostní ohodnocení (interpretace) je funkce přiřazující všem atomickým formulím dané úvahy pravdivostní hodnoty (tj. každému výrokovému symbolu přiřadí 0 nebo 1).
- Valuace je rozšíření interpretace z atomických na všechny formule dle tabulky pro výrokové spojky (přiřadí 0 nebo 1 např. i $p \wedge \neg q$).
- Interpretace I splňuje formuli A (formule je pravdivá v I, resp. odpovídající valuace $I'(A) = 1$), pokud
  1. A je výrokový symbol a $I(A) = 1$
  2. A je $\neg B$ a I nesplňuje B, resp. $I'(B) = 0$
  3. A je tvaru $B \wedge C$ a I splňuje B i C, resp. $I'(B) = I'(C) = 1$
  4. A je $B \vee C$ a I splňuje B nebo C, resp. $I'(B) = 1$ nebo $I'(C) = 1$
  5. A je tvaru $B \Rightarrow C$ a I nesplňuje B nebo splňuje C, resp. $I'(B) = 0$ nebo $I'(C) = 1$
  6. A je $B \Leftrightarrow C$ a I splňuje B i C nebo I nesplňuje B i C, resp. $I'(B) = I'(C)$

Splnitelnost. Model formule

- Mějme formuli $\neg p \vee p$; všechny možné interpretace (existují dvě: $I(p) = 1, I_1(p) = 0$) splňují tuto formuli.
  Formule, která je splňována každou interpretací, se nazývá tautologie.
- Formule $\neg p \wedge p$ není splňována žádnou z možných interpretací; takové formule nazýváme kontradikce.
- Formule A je splnitelná, je-li splňována alespoň jednou interpretací. Tuto interpretaci označujeme jako model formule A.
- Množina formulí $\mathbf{T}$ je splnitelná, pokud existuje interpretace splňující každou formuli z $\mathbf{T}$. Tuto interpretaci nazýváme modelem množiny $\mathbf{T}$.
- Formule A logicky vyplývá (na základě výrok. logiky) z množiny $\mathbf{T}$, pokud pro každý model I množiny $\mathbf{T}$ I splňuje A. Zapisujeme $\mathbf{T} \models A$.

Normální formy

- **Věta o reprezentaci**: každou n-ární pravdivostní funkci lze reprezentovat formulí výrokové logiky $A(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ obsahující pouze spojky $\neg, \wedge$ a $\vee$, kde $m \leq n$.
- Jak zkonstruovat k funkci tuto formuli (základ důkazu věty): nechť je funkce reprezentována standardní tabulkou. Jsou-li všechny funkční hodnoty rovny 0, je reprezentující formulí libovolná kontradikce, například $p_1 \wedge \neg p_1$. Jinak pro každý řádek, v němž je funkční hodnota rovna 1, vytvoříme konjunkci $K_i = {}^i p_1 \wedge {}^i p_2 \wedge \cdots \wedge {}^i p_n$, kde pro $j = 1, 2, \ldots, n$

$$
{}^i p_j = \begin{cases} p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu } 1 \\ \neg p_j & \text{je-li v } i\text{-tém řádku hodnota } j\text{-tého argumentu } 0 \end{cases}
$$

Disjunkce D všech konjunkcí K_i reprezentuje danou pravdivostní funkci.

Příklad

Příklad: určete formuli reprezentující následující pravdivostní funkci:

x	y	$f(x,y)$	K_i	D_i
1	1	1	$K_1 = p \wedge q$	
1	0	0		$D_2 = \neg p \vee q$
0	1	1	$K_3 = \neg p \wedge q$	
0	0	1	$K_4 = \neg p \wedge \neg q$	

- atomické formule a jejich negace $==$ literály. Elementární konjunkcí nad $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nazveme každou konjunkci, v níž se každý z těchto symbolů vyskytuje jako literál právě jednou. Úplnou normální disjunktivní formou (úndf) nad týmiž symboly nazveme každou disjunkci všech těchto (vesměs různých) elementárních konjunkcí.
- podobně úplná normální konjunktivní forma (únkf) bude konjunkcí všech disjunkcí v sloupci D_i
- $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ je v úplné normální disjunktivní formě
- $(\neg p \vee q)$ je v úplné normální konjunktivní formě

Pravdivost v interpretaci

Formule A je pravdivá v interpretaci I (Interpretace I splňuje formuli A), jestliže po substituci *za výrokové symboly* vrací hodnotu TRUE

Dokážeme dosazením z I do A a vyhodnocením (valuací) logických spojek.

Silnější vlastnost: pravdivost ve všech interpretacích

Logická pravdivost I

Formule je logicky pravdivá (pravdivá), jestliže je pravdivá ve všech interpretacích.

pravdivá formule == tautologie, anglicky též a valid formula

Důkaz (logické) pravdivosti formule: model checking; ukážeme, že formule je pravdivá ve všech interpretacích.

Vytvoříme pravdivostní tabulku a pro každou interpretaci ověříme, že formule je v této interpretaci pravdivá.

Složitost n výrokových symbolů, tj. 2^n intrepretací

Existuje efektivnější způsob?

Logická pravdivost II

Příklad: $p \Rightarrow (p \vee r)$

Příklad: $p \vee (\neg p \wedge r)$

Příklad: $p \vee (\neg p \wedge r) \vee \neg p$

Příklad: $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

např. znegování formule a důkaz nesplnitelnosti? == důkaz sporem

Formule s implikací a důkaz sporem

$P \Rightarrow Q$

- ověření tautologií tvaru implikace metodou protipříkladu:
  $\Rightarrow$ je nepravdivá pouze pro pravdivý předpoklad a nepravdivý důsledek. Pro tuto variantu – za předpokladu nepravdivosti důsledku – pro příslušné interpretace ověříme (ne)pravdivost předpokladu.
- příklad: $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
  - předpoklad: p pravdivá, $q \Rightarrow p$ nepravdivá
  - jediná možnost nepravdivosti $q \Rightarrow p$:
    q pravdivá, p nepravdivé
  - spor s předpokladem pravdivosti p

$==$ důkaz sporem, proof by refutation or proof by contradiction.

$\alpha \models \beta$ právě když je formule $\alpha \wedge \neg\beta$ nesplnitelná.

Logický agent pro výpočet logického důsledku

```
function TT-ENTAILS?(KB,α) #returns true or false
    inputs: KB, the knowledge base,
        a sentence in propositional logic α,
        the query, a sentence in propositional logic
        symbol ← a list of the proposition symbols in KB and α
    return TT-CHECK-ALL(KB,α,symbols,{})

function TT-CHECK-ALL(KB,α,symbols,model) returns true or false
    if EMPTY?(symbols) then
        if PL-TRUE?(KB,model)then return PL-TRUE?(,model)
        else return true //when KB is false, always return true
    else
        P ← FIRST(symbols)
        rest ← REST(symbols)
        return (TT-CHECK-ALL(KB,α,rest,model ∪ P=true})
            and
            TT-CHECK-ALL(KB,α,rest,model ∪ {P=false}))
```

SAT problém

Výroková formule Φ je splnitelná, právě když existuje interpretace (tj substituce výrokových symbolů), která je modelem, tj. Φ je pravdivá v této interpretaci.

SAT problém: pro danou formuli Φ najít takovou interpretaci nebo vrátit, že neexistuje.

SAT problém je NP-uplný

existují podproblémy, které jsou P-SAT a jsou užitečné?

2-KNF (2-SAT) ... formule v konjunktní normální formě, kde každá klauzule obsahuje právě dva výrokové symboly.
Horn-SAT

3-KNF? NP-úplný. Důkaz např.
http://ktiml.mff.cuni.cz/ kucerap/NTIN090/NTIN090-poznamky.pdf

3-KNF

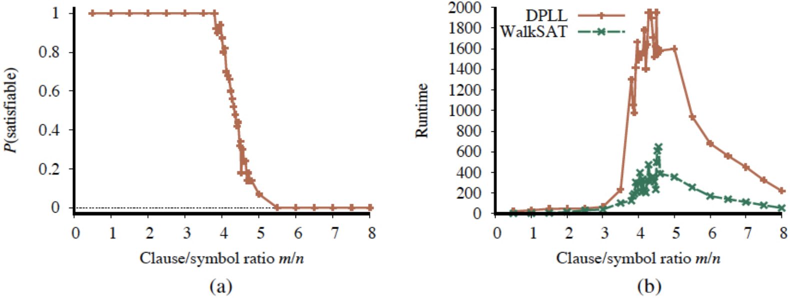

Figure 7.19 (a) Graph showing the probability that a random 3-CNF sentence with $n = 50$ symbols is satisfiable, as a function of the clause/symbol ratio m/n. (b) Graph of the median run time (measured in number of iterations) for both DPLL and WALKSAT on random 3-CNF sentences. The most difficult problems have a clause/symbol ratio of about 4.3.

Shrnutí

Víme,

- co je úplný systém logických spojek (angl. functionally complete)
- co je interpretace (angl. assignement)
- kdy je formule pravdivá v interpretaci (dtto interpretace splňuje formuli)
- co je model formule a množiny formulí
- co jsou tautologie a kontradikce
- kdy formule logicky vyplývá z množiny formulí/je logickým důsledkem této množiny
- co je logická pravdivost
- co je SAT problém

Příště

Predikátová logika