Predikátová logika

Luboš Popelínský

E-mail: popel@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

- Predikátová logika
- Základní pojmy. Syntax
- Sémantika predikátové logiky
- Normální formy v predikátové logice

Predikátová logika

- plně přejímá výsledky výrokové logiky
- zabývá se navíc strukturou jednotlivých jednoduchých výroků – na základě této analýzy lze odvodit platnost některých výroků, které ve výrokové logice platné nejsou

  Příklad: mějme následující výroky (+ označení výrokovými symboly):

  Každý člověk je smrtelný. (p)
  Sokrates je člověk. (q)
  Sokrates je smrtelný. (r)

  Na základě výrokové logiky nevyplývá r z p a q; přesto je úsudek zřejmě platný (na jiné úrovni, než je výroková logika).

Základní pojmy. Syntax

- Predikát je n-ární relace; vyjadřuje vlastnosti objektů a vztahy mezi objekty.
- konstanty reprezentují jména objektů (individuí); jedná se o prvky předem specifikované množiny hodnot – domény
- proměnné zastupují jména objektů, mohou nabývat libovolných hodnot z dané domény
- n-ární predikáty lze chápat jako množiny takových n-tic konstant, pro které je predikát splněn
- příklady:

  doména: přirozená čísla s nulou
  predikát $x < 4$ lze chápat jako $\{0, 1, 2, 3\}$

  doména: $\{0, 1, 2\}$
  predikát $x < y$ lze chápat jako $\{(0, 1), (1, 2), (0, 2)\}$

Funkce, termy. Kvantifikátory

- funkce reprezentují složená jména objektů
- příklad: nechť funkce $f(x, y)$ reprezentuje sčítání. Pak $f(1, 2)$ (stejně jako $f(2, 1), f(0, 3)$) jsou možná složená jména pro konstantu 3.
- poznámka: konstanty jsou nulární funkce
- výrazy složené pouze z funkčních symbolů, konstant a proměnných = termy. Příklad termu: $f(x, g(y, h(x, y), 1), z)$
- termy nabývaj9 hodnot z dané domény
- např. pro doménu přirozených čísel s nulou
  term $2 + (2 * x)$ může nabývat hodnot z množiny $\{2, 4, 6, \ldots\}$

Složené predikáty lze vytvářet i pomocí kvantifikátorů

- univerzální (obecný) kvantifikátor $\forall$:
  $\forall x P(x)$ – pro každý prvek x domény platí $P(x)$
- existenční kvantifikátor $\exists$:
  $\exists x P(x)$ – existuje alespoň jeden prvek x domény, pro který platí $P(x)$

Poznámky k zavedenému formálnímu jazyku

- pro predikátovou logiku 1. řádu je charakteristické, že jediný přípustný typ proměnných jsou objektové (individuální) proměnné (a pouze ty lze vázat kvantifikátory). V logice druhého řádu jsou povoleny i predikátové proměnné.
- konkrétní volbou (konstant), funkčních a predikátových symbolů lze formulovat specifický jazyk, pro který budou jistě platit obecné logické principy. Navíc pro něj mohou platit v závislosti na vlastnostech zvolených prvků i jiné (mimologické) principy, které je ovšem třeba specifikovat pomocí axiomů nebo pravidel. Takový jazyk je pak označován jako jazyk prvního řádu.
  Příklad – jazyk elementární aritmetiky:
  zvolené symboly: konstanta 0, unární funkce následník s, binární $+, *$
  možné termy: $0, s(0), s(x), (x+y)*0, (s(s(0))+(x*y))*s(0)$
  možné formule: $s(0)=(0*x)+s(0), \exists x(y=x*z),$
  $$\forall x((x \neq 0) \Rightarrow \exists y(x=s(y)))$$

Vázaný a volný výskyt proměnných

- podformule formule A je libovolná spojitá podčást A, která je sama formulí
  Příklad: formule $A = \exists x((\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y))$ má kromě sebe samé následující podformule: $(\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y), \forall y P(z), R(x,y), P(z)$
- výskyt proměnné x ve formuli A je vázaný, pokud existuje podformule B formule A, která obsahuje tento výskyt x a začíná $\forall x$, resp. $\exists x$. Výskyt proměnné je volný, není-li vázaný.
  Příklad: výskyt proměnné x v předchozí formuli A je vázaný (hledanou podformulí je celá A), proměnné y a z jsou volné
- proměnná x se volně vyskytuje v A, má-li tam alespoň jeden volný výskyt
- sentence predikátové logiky je formule bez volných výskytů proměnných (všechny výskyty všech proměnných jsou vázané)
- otevřená formule je formule bez kvantifikátorů

Substituce proměnných

- ‚skutečnými proměnnými', za které lze dosadit (udělit jim hodnotu, provést substituci), jsou pouze volné proměnné
- term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli A, pokud pro každou proměnnou y obsaženou v t neobsahuje žádná podformule A tvaru $\forall yB$, $\exists yB$ volný výskyt proměnné x
- je-li t substituovatelný za x v A, označíme $A(x/t)$ výraz, který vznikne z A nahrazením každého volného výskytu x termem t
- příklad: ve formuli $A = \exists xP(x, y)$ je možné provést například následující substituce: $A(y/z) = \exists xP(x, z)$, $A(y/2) = \exists xP(x, 2)$, $A(y/f(z, z)) = \exists xP(x, f(z, z))$. Není však možné substituovat $A(y/f(x, x)) = \exists xP(x, f(x, x))$, protože by došlo k nežádoucí vazbě proměnných.

Sémantika predikátové logiky

- pro analýzu sémantiky potřebujeme nejprve specifikaci jazyka (doména, konstanty, funkční a predikátové symboly)
- příklad: formální jazyk s jediným binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$ a jediným binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ lze chápat mj. jako
  - přirozená čísla s $<$ a $+$
  - racionální čísla s $\geq$ a max
  - celá čísla s $>$ a $*$
- interpretace (realizace) jazyka predikátové logiky je struktura I složená z
  - libovolné neprázdné množiny $\mathbf{D}$ (domény, oboru interpretace)
  - zobrazení $I(f) : \mathbf{D}^n\mathbf{D}$ pro každý n-ární funkční symbol $f, n \geq 0$
  - n-ární relace $I(P) \subseteq \mathbf{D}^n$ pro každý n-ární predikátový symbol P, $n \geq 1$

Interpretace jazyka: příklad

Příklad: mějme jazyk s binárním predikátovým symbolem $P(x, y)$, binárním funkčním symbolem $f(x, y)$ a symboly pro konstanty $a, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots,$ který chceme interpretovat jako celá čísla s $>$ a $+$.

- **D** je množina celých čísel,
- $I(a) = 0, I(a_1) = 1, I(a_2) = 2, \ldots, I(b_1) = -1, I(b_2) = -2, \ldots$ (jedná se o nulární funkce),
- $I(f) = +$
  (funkce zadaná pomocí rovnosti funkcí: zobrazení $I(f)$ definujeme jako funkci sčítání celých čísel; pak např. $I(f)(4, -2) = 2$),
- $I(P) = \ >$
  (relace zadaná pomocí rovnosti relací: $I(P)$ definujeme jako relaci ‚větší než' pro celá čísla; např. $(2, -1) \in I(P)$)

Interpretace proměnných a termů

- interpretace volných proměnných spočívá v jejich ohodnocení, což je libovolné zobrazení V (valuace) z množiny všech proměnných do $\mathbf{D}$
- ohodnocení, které přiřazuje proměnné x prvek $d \in \mathbf{D}$ a na ostatních proměnných splývá s valuací V, označíme $V[x/d]$
- hodnotou termu t v interpretaci I a valuaci V je prvek $|t|_{I,V} \in \mathbf{D}$ takový, že
  - je-li t proměnná, $|t|_{I,V} = V(t)$
  - je-li $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, pak $|t|_{I,V}$ je hodnotou funkce $I(f)$ pro argumenty $|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}$
- příklad: mějme interpretaci I z předchozího příkladu (celá čísla s $>$ a $+$) a valuaci $V(x) = 2$. Pak
  $|f(b_1, f(b_2, b_2))|_{I,V} = +(-1, +(-2, -2)) = -5$
  $|f(f(a, b_1), f(x, a_1))|_{I,V} = +(+(0, -1), +(2, 1)) = 2$

Splnitelnost formulí

Formule A je splňována interpretací I a valuací V, pokud

- A je $P(t_1, \ldots, t_n)$ a $(|t_1|_{I,V}, \ldots, |t_n|_{I,V}) \in I(P)$
- A je $t_1 = t_2$ a $|t_1|_{I,V} = |t_2|_{I,V}$ (oba termy reprezentují týž prvek)
- A je $\neg B$ a I, V nesplňují B
- A je tvaru $B \wedge C$ a I, V splňují B i C
- A je $B \vee C$ a I, V splňují B nebo C
- A je tvaru $B \Rightarrow C$ a I, V nesplňují B nebo splňují C
- A je $B \Leftrightarrow C$ a I, V splňují B i C nebo nesplňují B i C
- A je $\forall x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B pro libovolné $d \in \mathbf{D}$
- A je $\exists x B$ a $I, V[x/d]$ splňují B alespoň pro jedno $d \in \mathbf{D}$

Splnitelnost – příklad

Příklad: mějme dříve uvedenou interpretaci I (celá čísla s $>$ a $+$), mějme jinou interpretaci I' téhož formálního jazyka (celá čísla s $>$ a $*$, od I se liší pouze definicí $I'(f) = *$) a valuace definované na proměnné x takto: $V_1(x) = -2$, $V_2(x) = 2$

- formuli $\forall x P(f(x, a_1), x)$ interpretujeme v I jako $\forall x(x + 1 > x)$; formule je splňována I a libovolnou valuací. V I' interpretujeme formuli jako $\forall x(x * 1 > x)$ – není splněna pro libovolnou valuaci.
- $\forall x P(x, y)$ interpretujeme (v I i I') jako $\forall x(x > y)$, formule není splňována I (ani I') a libovolnou valuací
- formule $P(x, a)$ interpretovaná (v I i I') jako $x > 0$ je splňována I (i I') a V_2, není splňována I (ani I') a V_1
- formule $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \exists y P(x, y))$ interpretovaná (v I i I') jako $\forall x((x > 0) \Rightarrow \exists y(x > y))$ je splňována I (i I') a libovolnou valuací

Pravdivost formulí a jejich klasifikace

- formuli A nazveme pravdivou v interpretaci I, je-li splňována I pro libovolnou valuaci, píšeme $\models_I A$
- pravdivost formule záleží pouze na valuaci volných proměnných, které se v ní vyskytují
- pravdivost sentence (uzavřené formule) nezávisí na valuaci vůbec

Formule A predikátové logiky se nazývá

- tautologie, je-li pravdivá pro každou interpretaci (tj. pro každou I platí $\models_I A$), značíme $\models A$
- splnitelná, pokud existuje alespoň jedna interpretace a valuace, které ji splňují (př.: $\forall x P(x, x)$)
- kontradikce, je-li $\neg A$ tautologie (tj. $\models \neg A$)

Normální formy v predikátové logice

Prenexová normální forma (pnf)

- cíl: převést libovolnou (uzavřenou) formuli do tvaru, v němž jsou všechny kvantifikátory na začátku a následuje otevřené (= bez kvantifikátorů) jádro v nkf (ndf)
  $$Qx_1 \dots Qx_n((A_{1_1} \vee \dots \vee A_{1_{l_1}}) \wedge (A_{2_1} \vee \dots \vee A_{2_{l_2}}) \wedge \dots \wedge (A_{m_1} \vee \dots \vee A_{m_{l_m}}))$$
- příklad: $\forall x \forall y \exists z \forall w((P(x,y) \vee \neg Q(z)) \wedge (R(x,w) \vee R(y,w)))$
- **Věta:** pro každou formuli existuje ekvivalentní formule v konjunktivní (disjunktivní) prenexové normální formě.

Prenexová normální forma: algoritmus převodu

1. eliminovat zbytečné kvantifikátory
2. přejmenovat korektně proměnné tak, aby u každého kvantifikátoru byla jiná proměnná
3. eliminovat všechny spojky různé od $\neg, \wedge$ a $\vee$
4. přesunout negaci dovnitř, je-li potřeba:
   $\neg\forall x A$ nahradit $\exists x \neg A$
   $\neg(A \wedge B)$ nahradit $\neg A \vee \neg B$ apod.
5. přesunout kvantifikátory doleva ($o \in \{\wedge, \vee\}$, $Q \in \{\forall, \exists\}$):
   $A \; o \; QxB$ nahradit $Qx(A \; o \; B)$
   $QxA \; o \; B$ nahradit $Qx(A \; o \; B)$
6. použít distributivní zákony k převodu jádra do nkf (ndf):
   $A \vee (B \wedge C)$ nahradit $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
   $(A \wedge B) \vee C$ nahradit $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Převod do pnf – příklad

Příklad: převeďte do konjunktivní pnf formuli
$\forall x \exists y \neg(P(x,y) \Rightarrow \forall z R(y)) \vee \neg \exists x Q(x)$.

1. $\forall x \exists y \neg(P(x,y) \Rightarrow R(y)) \vee \neg \exists x Q(x)$ (zbytečné $\forall z$)
2. $\forall x_1 \exists y \neg(P(x_1,y) \Rightarrow R(y)) \vee \neg \exists x_2 Q(x_2)$ (přejmenování x)
3. $\forall x_1 \exists y \neg(\neg P(x_1,y) \vee R(y)) \vee \neg \exists x_2 Q(x_2)$ (eliminace $\Rightarrow$)
4. $\forall x_1 \exists y (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2)$ (přesun negace 2x)
5. $\forall x_1 (\exists y (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2))$ (posun $\forall x_1$ doleva)
   $\forall x_1 \exists y ((P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2))$ (posun $\exists y$ doleva)
   $\forall x_1 \exists y \forall x_2 ((P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \neg Q(x_2))$ (posun $\forall x_2$ doleva)
6. $\forall x_1 \exists y \forall x_2 ((P(x_1,y) \vee \neg Q(x_2)) \wedge (\neg R(y) \vee \neg Q(x_2)))$ (jádro do nkf)