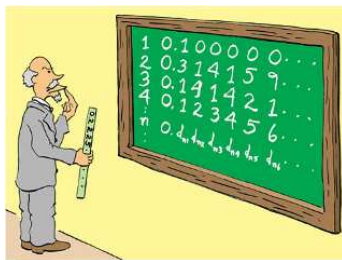


12 Nekonečné množiny, Zastavení algoritmu

Bystrého čtenáře může snadno napadnout myšlenka, proč se vlastně zabýváme dokazováním správnosti algoritmů a programů, když by to přece (snad?) mohl za nás dělat automaticky počítač samotný.

Bohužel to však nejde a je hlavním cílem této lekce ukázat důvody proč.



Stručný přehled lekce

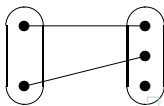
- * Nekonečné množiny, jejich „velikost“ a Cantorova diagonála.
- * „Naivní“ množinové paradoxy: Cantorův a Russelův.
- * Důkaz algoritmické neřešitelnosti problému zastavení programu.

12.1 O nekonečných množinách a kardinalitě

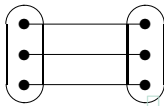
Uvažme problém stanovit, **kolik** má nekonečná množina prvků. Co nám třeba brání zavést pro velikost nekonečné množiny symbol ∞ ? □

– Ponejvíce závažný fakt, že není „nekonečno“ jako „nekonečno“ (Věta 12.2)! □

Definice: Množina A je „*nejvýše tak velká*“ jako množina B , právě když existuje injektivní funkce $f : A \rightarrow B$. □



Množiny A a B jsou „*stejně velké*“ právě když mezi nimi existuje bijekce. □

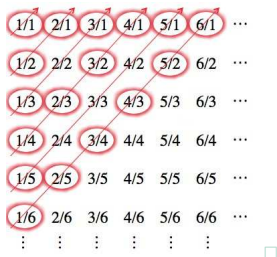


V případech nekonečných množin pak mluvíme formálně o jejich **kardinalitě**.

Ukázky kardinalit množin

Uvedená definice kardinality množin funguje korektně i pro nekonečné množiny:

- * Například \mathbb{N} a \mathbb{Z} mají stejnou kardinalitu (jsou „stejně velké“, tzv. *spočetně nekonečné*). \square
- * Lze snadno ukázat, že i \mathbb{Q} je spočetně nekonečná, tj. existuje bijekce $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, stejně jako bijekce $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$.

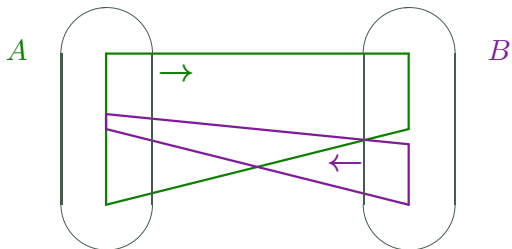


- * Existují ale i nekonečné množiny, které jsou „striktně větší“ než libovolná spočetná množina (příkladem je \mathbb{R} ve Větě 12.2). \square
- * Později dokážeme, že existuje nekonečná posloupnost nekonečných množin, z nichž *každá je striktně větší než všechny předchozí*.

Zjednodušeně místo bijekce

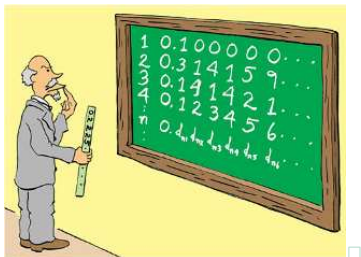
Pro porovnávání velikostí množin někdy s výhodou využijeme následující přirozené, ale nelehké tvrzení (bez důkazu):

Věta 12.1. *Pro libovolné dvě množiny A, B platí, že pokud existuje injekce $A \rightarrow B$ a zároveň i injekce $B \rightarrow A$, pak **existuje bijekce** mezi A a B .*



Cantorova diagonála, aneb kolik je reálných čísel

Věta 12.2. *Neexistuje žádné surjektivní zobrazení $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.*



Důsledek 12.3. *Neexistuje žádné injektivní (ani bijektivní) zobraz. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. Neformálně řečeno, reálných čísel je striktně více než všech přirozených.*

Věta. Neexistuje žádné surjektivní zobrazení $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Důkaz (Věty 12.2 sporem): Necht' takové g existuje a pro zjednodušení se omezme jen na funkční hodnoty v intervalu $(0, 1)$. Podle hodnot zobrazení g si takto můžeme „uspořádat“ dekadické zápisy **všech reálných** čísel v intervalu $(0, 1)$ po řádcích do tabulky:

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 g(0) = 0. & \mathbf{1} & 2 & 5 & 4 & 2 & 7 & 5 & 7 & 8 & 3 & 2 & 5 & \dots \\
 g(1) = 0. & & & & \mathbf{4} & 1 & & & & & & & & \dots \\
 g(2) = 0. & & & & & & \mathbf{1} & 2 & & & & & & \dots \\
 g(3) = 0. & & & & & & & & \mathbf{3} & 1 & & & & \dots \quad \square \\
 g(4) = 0. & & & & & & & & & & \mathbf{9} & 1 & & \dots \\
 \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \ddots
 \end{array}$$

□
Nyní sestrojíme číslo $\alpha \in (0, 1)$ následovně; jeho i -tá číslice za desetinnou čárkou bude 1, pokud v i -tém řádku tabulky na diagonále není 1, jinak to bude 2. V našem příkladě $\alpha = \mathbf{0.21211\dots}$ □

Kde se naše číslo α v tabulce nachází? Nezapomeňme, že g byla surjektivní, takže α někde musí být. Konstrukce však ukazuje, že α se od každého čísla v tabulce liší na aspoň jednom desetinném místě, a to je spor.

(Až na drobný technický detail s rozvojem $\dots \bar{9}$.) □

12.2 „Naivní“ množinové paradoxy

Analogickým způsobem k Větě 12.2 lze dokázat následovné zobecnění.

Věta 12.4. *Nechť M je libovolná množina. Pak existuje injektivní zobrazení $f : M \rightarrow 2^M$, ale neexistuje žádné bijektivní zobrazení $g : M \rightarrow 2^M$.* \square

Důkaz: Dokážeme nejprve existenci f . Stačí ale položit $f(x) = \{x\}$ pro každé $x \in M$. Pak $f : M \rightarrow 2^M$ je zjevně injektivní. \square

Neexistenci g dokážeme sporem. Předpokládejme tedy naopak, že existuje bijekce $g : M \rightarrow 2^M$. Uvažme množinu $K \subseteq M$ definovanou takto:

$$K = \{x \in M \mid x \notin g(x)\}.$$

Jelikož g je bijektivní a $K \in 2^M$, musí existovat $y \in M$ takové, že $g(y) = K$. \square
Nyní rozlišíme dvě možnosti:

- $y \in g(y)$. Tj. $y \in K$. Pak ale $y \notin g(y)$ z definice K , což je spor.
- $y \notin g(y)$. To podle definice K znamená, že $y \in K$, tj. $y \in g(y)$, spor. \square

Dvě navazující poznámky.

- Technika použitá v důkazech Vět 12.2 a 12.4 se nazývá *Cantorova diagonální metoda*, nebo také zkráceně *diagonalizace*. □

Konstrukci množiny K lze znázornit pomocí následující tabulky:

| | a | b | c | d | \dots |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $g(a)$ | ✓ | — | — | ✓ | \dots |
| $g(b)$ | ✓ | — | — | ✓ | \dots |
| $g(c)$ | — | ✓ | — | ✓ | \dots |
| $g(d)$ | — | — | ✓ | ✓ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \ddots |

Symbol ✓ resp. — říká, že prvek uvedený v záhlaví sloupce patří resp. nepatří do množiny uvedené v záhlaví řádku. Tedy např. $d \in g(b)$ a $a \notin g(d)$. □

- Z toho, že nekonečna mohou být „různě velká“, lze lehce odvodit řadu dalších faktů. V jistém smyslu je např. množina všech problémů větší než množina všech algoritmů (obě množiny jsou nekonečné), a proto nutně existují problémy, které **nejsou algoritmicky řešitelné**.

Cantorův paradox

Příklad 12.5. *Uvážíme-li nyní nekonečnou posloupnost množin*

$$A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$$

kde $A_1 = \mathbb{N}$ a $A_{i+1} = 2^{A_i}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$, je vidět, že všechny množiny jsou nekonečné a každá je striktně větší než libovolná předchozí. \square

Kde však v tomto řazení kardinalit bude „množina všech množin“? \square Na tuto otázku, jak sami asi cítíte, nelze podat odpověď. Co to však znamená? \square

- * Takto se koncem 19. století objevil první **Cantorův paradox** teorie množin. \square
- * Dnešní moderní vysvětlení paradoxu je jednoduché, prostě „množinu všech množin“ **nelze definovat**, taková v matematice neexistuje. \square

Brzy se však ukázalo, že je ještě **mnohem hůř**...

Russelův paradox

Fakt: Není pravda, že **každý soubor prvků** lze považovat za množinu.

- Necht' $X = \{M \mid M \text{ je množina taková, že } M \notin M\}$. □ Platí $X \in X$? □
 - * Ano. Tj. $X \in X$. Pak ale X splňuje $X \notin X$. □
 - * Ne. Pak X splňuje vlastnost $X \notin X$, tedy X je prvkem X , tj., $X \in X$. □
- Obě možné odpovědi vedou ke sporu. X tedy **nelze** prohlásit za množinu. Jak je ale něco takového vůbec možné?

Vidíte u Russelova paradoxu podobnost přístupu s Cantorovou diagonalizací? Russelův paradox se objevil začátkem 20. století a jeho „jednoduchost“ zasahující úplně základy matematiky (teorie množin) si vynutila hledání seriózního rozřešení a rozvoj formální matematické logiky. □

- * Pro ilustraci tohoto paradoxu, slyšeli jste už, že „**v malém městečku žije holič, který holí právě ty muže městečka, kteří se sami neholí**“? □
- * Zmíněné paradoxy naivní teorie množin zatím v tomto kurzu nerozřešíme, ale zapamatujeme si, že většina matematických a inženýrských disciplín vystačí s „**intuitivně bezpečnými**“ množinami.

12.3 Algoritmická neřešitelnost problému zastavení

Fakt: Uvědomme si (velmi neformálně) několik základních myšlenek.

- Program v každém programovacím jazyce je konečná posloupnost složená z **konečně mnoha** symbolů (písmena, číslice, mezery, speciální znaky, apod.) Necht' Σ je množina všech těchto symbolů. Množina všech programů je tedy jistě podmnožinou množiny $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i$, která je spočetně nekonečná. Existuje tedy bijekce f mezi množinou \mathbb{N} a množinou všech programů. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ označme symbolem P_j program $f(j)$. Pro **každý program** P tedy existuje $i \in \mathbb{N}$ takové, že $P = P_i$. \square
- Každý možný vstup každého možného programu lze zapsat jako **konečnou posloupnost** symbolů z konečné množiny Γ . Množina všech možných vstupů je tedy spočetně nekonečná a existuje bijekce g mezi množinou \mathbb{N} a množinou všech vstupů. Pro každé $j \in \mathbb{N}$ označme symbolem V_j vstup $g(j)$. \square
- Předpokládejme, že **existuje program** *Halt*, který pro dané $i, j \in \mathbb{N}$ zastaví s výstupem *ano/ne* podle toho, zda P_i pro vstup V_j zastaví, nebo ne.
- Tento předpoklad dále dovedeme ke **sporu** dokazujícímu, že problém zastavení nemá algoritmické řešení.

Věta 12.6. Neexistuje program *Halt*, který by pro vstup (P_i, V_j) správně rozhodl, zda se program P_i zastaví na vstupu V_j .

Důkaz: Sporem uvažme program *Diag* s následujícím kódem:

```
input k;  
if Halt(k,k) = ano then while true do ; done□
```

Fungování programu *Diag* lze znázornit za pomoci následující tabulky:

| | P_0 | P_1 | P_2 | P_3 | ... |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| V_0 | ✓ | — | — | ✓ | ... |
| V_1 | ✓ | — | — | ✓ | ... |
| V_2 | — | ✓ | — | ✓ | ... |
| V_3 | — | — | ✓ | ✓ | ... |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Symbol ✓ resp. — říká, že program uvedený v záhlaví sloupce zastaví resp. nezastaví pro vstup uvedený v záhlaví řádku. Program *Diag* „zneguje“ diagonálu této tabulky.

```

if Halt(k,k) = ano then
    while true do ; done
fi

```

| | P_0 | P_1 | P_2 | P_3 | \dots |
|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| V_0 | ✓ | – | – | ✓ | \dots |
| V_1 | ✓ | ✓ | – | ✓ | \dots |
| V_2 | – | ✓ | ✓ | ✓ | \dots |
| V_3 | – | – | ✓ | ✓ | \dots |
| \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \vdots | \dots |

Podle našeho předpokladu ($Diag$ je program a posloupnost P_i zahrnuje **všechny programy**) existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $Diag = P_j$. \square

Zastaví $Diag$ pro vstup V_j ? \square

- **Ano.** Podle kódu $Diag$ pak ale tento program vstoupí do nekonečné smyčky, tedy **nezastaví**. \square
- **Ne.** Podle kódu $Diag$ pak ale **if** test neuspěje, a tento program tedy **zastaví**. \square

Předpoklad existence programu $Halt$ tedy vede ke sporu. \square

Otázkami algoritmické (ne)řešitelnosti problémů se zabývá **teorie vyčíslitelnosti**. \square

Metoda diagonalizace se také často využívá v **teorii složitosti** k důkazu toho, že dané dvě složitostní třídy jsou různé.