

## 5 Rekurse a induktivní definice

Mimo „přímočarých“ definic množin a funkcí, jako výčtem prvků či explicitním zadáním, se obzvláště v informatice setkáváme s definicemi nepřímými, které se odvolávají na sebe sama.



Odborně se taková situace nazývá *rekurzí* či *induktivní definicí*. □

### Stručný přehled lekce

- \* Posloupnosti a rekurentní vztahy pro ně, jejich řešení a důkazy.
- \* Rekurse za přítomnosti více parametrů a použití indukce.
- \* Induktivní definice množin s ukázkami.

## 5.1 Posloupnosti a rekurentní vztahy

- Uspořádané  $k$ -tice z daného oboru hodnot  $H$  jsou nazývány *konečnými posloupnostmi* délky  $k$  (nad  $H$ ). □
- Pojem posloupnosti zobecňuje toto pojetí na „nekonečnou délku“ takto:

**Definice 5.1. Posloupnost** (nekonečná) je zobrazením z přirozených čísel  $\mathbb{N}$  do oboru hodnot  $H$ , neboli

$$p : \mathbb{N} \rightarrow H.$$

Místo „funkčního“ zápisu  $n$ -tého členu posloupnosti jako  $p(n)$  častěji používáme „indexovou“ formu jako  $p_n$ , ve které se celá posloupnost zapíše  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . □

Oborem hodnot  $H$  posloupnosti obvykle bývá nějaká číselná množina, ale může to být i jakákoliv jiná množina. □

**Poznámka:** Třebaže to není zcela formálně přesné, běžně se setkáme s posloupnostmi indexovanými od nuly nebo od jedničky, jak se to v aplikacích hodí. I my se budeme tímto řídit a vždy si určíme počáteční index podle potřeby.

## Příklady posloupností

- $p_0 = 0, p_1 = 2, \dots, p_i = 2i, \dots$  je posloupnost sudých nezáporných čísel,  $\square$
- $(3, 3.1, 3.14, 3.141, \dots)$  je posl. postupných dekadických rozvoju  $\pi$ ,  $\square$
- třeba *(jablko, hruška, švestka, hruška, hruška, ...)* je posloupnost nad druhy ovoce coby oborem hodnot.  $\square$
- $(1, -1, 1, -1, \dots)$  je posloupnost určená vztahem  $p_i = (-1)^i, i \geq 0$ ,  $\square$
- avšak pokud bychom chtěli stejnou posloupnost  $(1, -1, 1, -1, \dots)$  určit indexy od jedné, tj. zadat ji jako  $q_i, i \geq 1$ , tak vztah bude  $q_i = (-1)^{i-1}$ .  $\square$

**Definice:** Posloupnost  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je

\* *rostoucí* pokud  $p_{n+1} > p_n$  a *nerostoucí* pokud  $p_{n+1} \leq p_n$ ,

\* *klesající* pokud  $p_{n+1} < p_n$  a *neklesající* pokud  $p_{n+1} \geq p_n$

platí pro všechna  $n$ .

## Rekurentní zadání posloupnosti

**Definice:** Říkáme, že posloupnost  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je zadána *rekurentně*, pokud je dán její počáteční člen  $p_0$  (či několik počátečních členů) a dále máme předpis, jak určit hodnotu členu  $p_{n+1}$  z hodnot  $p_i$  pro nějaká  $i \leq n$ .  $\square$

Ukázky rekurentně zadaných posloupností:

- Zadáme-li posloupnost  $p_n$  počátečním členem  $p_0 = 1$  a rekurentním vztahem  $p_{n+1} = 2p_n$  pro  $n \geq 0$ , pak platí  $p_n = 2^n$  pro všechna  $n$ .  $\square$
- Funkce „faktoriál“ (na přirozených číslech) je dána počáteční hodnotou  $0! = 1$  a rekurentním vztahem  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$  pro  $n \geq 0$ .  $\square$
- Známa Fibonacciho posloupnost je zadána počátečními členy  $f_1 = f_2 = 1$  a vztahem  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$  pro  $n \geq 1$ .  $\square$

Všimněte si v poslední ukázce, že není potřeba doslova dodržovat formu rekurentního vztahu „ $p_{n+1}$  z hodnot  $p_i$ “, ale vždy je třeba hodnotu následujícího členu posloupnosti odvozovat z předchozích (tj. už určených) členů, v tom případě „ $f_{n+2}$  z hodnot  $f_i$ ,  $i = n, n+1$ “.

## Řešení rekurentní posloupnosti

**Příklad 5.2.** Posloupnost  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  je zadaná rekurentní definicí

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená  $n$ . Určete hodnotu  $f(n)$  vzorcem v závislosti na  $n$ .  $\square$

**Řešení:** V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout“ hledaný vzorec pro  $f(n)$ . Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme...  $\square$

$$f(1) = 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

$$f(3) = 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

$$f(4) = 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \square$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba výrazy  $8 - 1$ ,  $16 - 1$ ,  $32 - 1$ ,  $64 - 1 \dots$ ? Bystrým studentům se již asi podařilo uhodnout (a ostatním napovídáme), že jde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji,  $f(n) = 2^{n+2} - 1$ .  $\square$

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle  $n$ .  $\square$

**Příklad 5.2.** Posloupnost  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  je zadána rekurentní definicí

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená  $n$ . Určete hodnotu  $f(n)$  vzorcem v závislosti na  $n$ .

**Řešení:** ...

Bystrým studentům se již asi podařilo uhodnout (a ostatním napovídáme), že jde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji,  $f(n) = 2^{n+2} - 1$ .

Ve druhé fázi nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle  $n$ .  $\square$

- Báze pro  $n := 0$  říká  $f(0) = 2^{0+2} - 1 = 4 - 1 = 3 = f(0)$ , což platí.  $\square$
- Indukční krok využije indukční předpoklad platnosti vztahu  $f(n) = 2^{n+2} - 1$  pro  $n := i$  (tj.  $f(i) = 2^{i+2} - 1$ )  $\square$  a pokračuje úpravou ze zadaného rekurentního vzorce

$$f(i+1) = 2 \cdot f(i) + 1 = 2 \cdot (2^{i+2} - 1) + 1 = 2 \cdot 2^{i+2} - 2 + 1 = 2^{(i+1)+2} - 1,$$

což po dosazení pro  $n := i+1$  znamená opět požadovaný vztah  $f(n) = 2^{n+2} - 1$ .  $\square$

Podle principu matematické indukce je nyní dokázáno, že pro zadanou rekurentní posloupnost  $f$  platí  $f(n) = 2^{n+2} - 1$  pro všechna přirozená  $n$ .  $\square$

**Příklad 5.3.** Posloupnost  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je zadaná rekurentní definicí

$$s_0 = 0 \quad \text{a} \quad s_n = s_{n-1} + n^2$$

pro všechna  $n \geq 1$ . □ Dokažte, že  $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  pro všechna přirozená  $n$ .

**Řešení:** Opět postupujeme matematickou indukcí podle  $n$ . □

- Báze  $n := 0$ :  $s_0 = \frac{1}{6} \cdot 0 \cdot (0+1)(2 \cdot 0 + 1) = 0$ , což platí. □
- Indukční krok: za využití  $s_{i-1} = \frac{1}{6}(i-1)(i-1+1)(2i-2+1) = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1)$ , což je indukční předpoklad pro  $n := i-1$  a libovolné  $i \geq 1$ , upravujeme

$$\begin{aligned} s_i &= s_{i-1} + i^2 = \frac{1}{6}(i-1)i(2i-1) + i^2 = \frac{1}{6}i(2i^2 - 3i + 1) + i^2 \square \\ &= \frac{1}{6}i(2i^2 - 3i + 1 + 6i) = \frac{1}{6}i(i+1)(2i+1), \end{aligned}$$

což dokazuje požadovaný vztah  $s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$  také pro  $n := i$ . □

□

**Poznámka:** Výsledek Příkladu 5.3 je ukázkou tzv. sumačního vzorce pro řadu

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Jinou ukázkou je už dříve zmíněný základní vztah  $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

## 5.2 Rekurse s více parametry a indukce

- Kromě přímočarých ukázek rekurse na funkcích s jediným celočíselným parametrem (tj. na posloupnostech) se lze setkat, především v návrhu algoritmů, s rekurzí za přítomnosti více parametrů. □
- I pro takové obecnější případy je základním matematickým přístupem použít indukci, avšak nejprve je nutno vhodně zvolit či vytvořit jeden celočíselný parametr, podle něžž indukci můžeme vést. □
- Samozřejmě takový parametr (i nově vytvořený) opět musí být zdola ohraničený a pro každou rekurentně odkazovanou hodnotu musí být nižší než pro aktuálně určenou hodnotu.

Možné přístupy k věci si uvedeme na několika typických ukázkách.



## Přístup fixace parametru

**Příklad 5.4.** Mějme funkci  $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou rekurentně takto:  $\square$

- $m(0, b) = 0$  pro všechna  $b \in \mathbb{N}$  a
- $m(a + 1, b) = m(a, b) + b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{N}$ .

$\square$  Co bude hodnotou  $m(a, b)$  pro obecné  $a, b \in \mathbb{N}$ ?  $\square$

Bližším pohledem na zadanou definici zjistíme, že hloubka zanoření rekurze pro vyčíslení  $m(a, b)$  je přesně  $a$ . Jelikož každé zanoření k výsledku přičte hodnotu  $b$ , odhadneme:  $\square$

**Věta.** Pro každá  $a, b \in \mathbb{N}$  platí  $m(a, b) = a \cdot b$  (součin daných parametrů).

Jaký je vhodný postup k důkazu tohoto tvrzení indukcí? Je snadno vidět, že rekurentní vyhodnocení na hodnotě parametru  $b$  nijak podstatně nezáleží ( $b$  lze **fixovat**) a důležité je sledovat měnící se hodnotu  $a$ . Tato úvaha nás dovede k následujícímu přístupu:

Mějme  $m : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ :

\*  $m(0, b) = 0$  pro všechna  $b \in \mathbb{N}$  a

\*  $m(a + 1, b) = m(a, b) + b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{N}$ .

□ **Věta.** Pro každá  $a, b \in \mathbb{N}$  platí  $m(a, b) = a \cdot b$  (součin daných parametrů).

**Důkaz:** Budiž  $b \in \mathbb{N}$  libovolné ale pro další úvahy **pevné**. □

Dokazujeme tady, že pro každou hodnotu  $a := i \in \mathbb{N}$  platí  $m(i, b) = i \cdot b$ . □

- V **bázi**  $i = 0$  je explicitně zadáno  $m(0, b) = 0 = 0 \cdot b$  pro jakékoliv  $b \in \mathbb{N}$ . □
- **Indukční krok.** Necht' je tvrzení známo pro  $a = i \in \mathbb{N}$  a uvažme hodnotu parametru  $a := i + 1$ . Podle zadání pak platí  $m(i + 1, b) = m(i, b) + b$ . □ Podle indukčního předpokladu již víme, že  $m(i, b) = i \cdot b$ . □ Zbývá jen uvedené poznatky správně zřetězit

$$m(a, b) = m(i + 1, b) = m(i, b) + b = i \cdot b + b = (i + 1) \cdot b = a \cdot b.$$

Důkaz matematickou indukcí je tímto zdárně ukončen. □

## Indukce k součtu parametrů

**Příklad 5.5.** Mějme funkci  $k : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  definovanou rekurentně takto:  $\square$

- $k(c, 0) = k(0, c) = 1$  pro všechna  $c \in \mathbb{N}$  a
- $k(m, n) = k(m, n - 1) + k(m - 1, n)$  pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n > 0$ .

$\square$  Co bude hodnotou  $k(m, n)$  pro obecné  $m, n \in \mathbb{N}$ ?  $\square$

Studenti znalí takzvaného *Pascalova trojúhelníka* už mohou tušit, že výsledek souvisí s počtem podmnožin a tedy kombinačními čísly.  $\square$

My si zde správnou odpověď nejen ukážeme, ale i přesně dokážeme:

**Věta.** Pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  je hodnota  $k(m, n)$  rovna počtu všech  $m$ -prvkových podmnožin  $(m + n)$ -prvkové množiny, tedy jinými slovy roven známému kombinačnímu číslu  $k(m, n) = \binom{m+n}{m}$ .

\*  $k(c, 0) = k(0, c) = 1$  pro všechna  $c \in \mathbb{N}$  a

\*  $k(m, n) = k(m, n - 1) + k(m - 1, n)$  pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n > 0$ .

**Věta.** Pro každé  $m, n \in \mathbb{N}$  je hodnota  $k(m, n)$  rovna počtu všech  $m$ -prvkových podmnožin  $(m + n)$ -prvkové množiny, tedy jinými slovy roven známému kombinačnímu číslu  $k(m, n) = \binom{m+n}{m}$ .

□

**Důkaz** indukcí vzhledem k součtu parametrů  $i = m + n$ : □

- **Báze**  $i = m + n = 0$  pro  $m, n \in \mathbb{N}$  znamená, že  $m = n = 0$ . Zde však s výhodou využijeme tzv. „rozšíření báze“ na všechny hraniční případy  $m = 0$  nebo  $n = 0$  naší rekurze.

V obou rozšířených případech je přímo zadáno  $k(m, 0) = k(0, n) = 1$ . Je toto platná odpověď? □

- \* Kolik je prázdných podmnožin ( $m = 0$ ) jakékoliv množiny? Jedna,  $\emptyset$ .
- \* Kolik je  $m$ -prvkových podmnožin  $m$ -prvkové ( $n = 0$ ) množiny? Zase jedna, ta množina samotná.

Tím je důkaz rozšířené báze indukce dokončen.

\*  $k(c, 0) = k(0, c) = 1$  pro všechna  $c \in \mathbb{N}$  a

\*  $k(m, n) = k(m, n - 1) + k(m - 1, n)$  pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m, n > 0$ .

- **Indukční krok** přechází na součet  $i + 1 = m + n$ . □ Navíc díky předchozímu rozšíření báze se rovnou můžeme omezit na případy  $m, n > 0$ . □

Platí tedy podle zadání  $k(m, n) = k(m, n - 1) + k(m - 1, n)$ . □ Přitom oba rekurentní odkazy,  $k(m, n - 1)$  i  $k(m - 1, n)$  se vztahují na případy se součtem obou parametrů rovným  $m - 1 + n = m + n - 1 = i$ . □

Podle indukčního předpokladu tudíž platí, že  $k(m, n - 1)$  je počtem  $m$ -prvkových podmnožin  $i$ -prvkové množiny □ a  $k(m - 1, n)$  je počtem  $(m - 1)$ -prvkových podmnožin  $i$ -prvkové množiny, třeba množiny  $M = \{1, 2, \dots, i\}$ .

Kolik je  $m$ -prvkových podmnožin  $(i + 1)$ -prvkové množiny  $M' = M \cup \{i + 1\}$ ? Pokud ze všech těchto podmnožin odebereme prvek  $i + 1$ , dostaneme právě □

\*  $m$ -prvkové podmnožiny (z těch neobsahujících prvek  $i + 1$ ) □

plus

\*  $(m - 1)$ -prvkové podmnožiny (z těch původně obsahujících  $i + 1$ ). □

A to je v součtu rovno právě  $k(m - 1, n) + k(m, n - 1) = k(m, n)$ . □

## Přístup se zesílením dokazovaného tvrzení

**Příklad 5.6.** Zjistěte, jakou hodnotu v závislosti na celočíselném parametru  $a$  nabývá funkce  $t(a, 1)$ , která je rekurentně definována takto:  $\square$

- $t(0, b) = 0$  pro všechna  $b \in \mathbb{N}$  a
- $t(a, b) = t(a - 1, 2b) + b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ .

$\square$  Zkusíme-li si ručně vypočítat několik prvních požadovaných hodnot  $t(a, 1)$  pro  $a = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , postupně získáme výsledky rovné  $0, 1, 3, 7, 15, \dots$  (všimněte si také, jak se v rekurzivním rozvoji postupně sčítají mocniny dvou).  $\square$  Na základě toho již není obtížné uhodnout, že návratová hodnota patrně bude obecně určena vztahem  $2^a - 1$ .

Toto je však třeba také dokázat.  $\square$

Jak záhy zjistíme, matematická indukce na naše tvrzení přímo „nezabírá“, ale mnohem lépe se nám povede s následujícím přirozeným zesílením dokazovaného tvrzení, které zobecňuje výsledek na proměnné hodnoty parametru  $b$  v návaznosti na zadaný rekurentní vztah.

- \*  $t(0, b) = 0$  pro všechna  $b \in \mathbb{N}$  a
- \*  $t(a, b) = t(a - 1, 2b) + b$  pro všechna  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a > 0$ .

**Věta.** Pro každé  $a, b \in \mathbb{N}$  platí  $t(a, b) = (2^a - 1) \cdot b$ .

**Důkaz:** Postupujeme indukcí podle  $a := i \in \mathbb{N}$ .  $\square$

- \* V **bázi** pro  $a = i = 0$  je určena hodnota  $t(a, b) = 0 = (2^0 - 1) \cdot b$ .  $\square$
- \* **Indukční krok.** Nechť je tvrzení známo pro  $a = i \in \mathbb{N}$  a uvažujme další hodnotu  $a := i + 1 > 0$ .  $\square$  V tom případě je rekurentní podmínkou dáno  $t(a, b) = t(a - 1, 2b) + b$ , přičemž hodnota  $t(a - 1, 2b) = t(i, 2b)$  vyplývá z dosazeného  $a = i + 1$  a indukčního předpokladu. Celkově tedy  $\square$

$$t(a, b) = t(i, 2b) + b = (2^i - 1) \cdot 2b + b \square = 2^{i+1}b - 2b + b = (2^{i+1} - 1) \cdot b.$$

Poslední výraz je roven požadovanému  $(2^a - 1) \cdot b$ .  $\square$

## 5.3 Induktivní definice množin

Širokým zobecněním rekurentních definic posloupností je následující koncept.

**Definice 5.7. Induktivní definice** množiny.

Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny  $M$  v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných (*bázických*) prvků  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ .  $\square$
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

Jsou-li (libovolné prvky)  $x_1, \dots, x_\ell \in M$ , pak také  $y \in M$ .

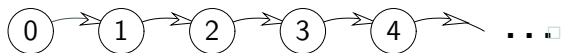
V tomto případě je  $y$  typicky funkcí  $y = f_i(x_1, \dots, x_\ell)$  (v pravidle číslo  $i$ ).  $\square$

Pak naše *induktivně definovaná množina*  $M$  je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující všem těmto pravidlům.



## Několik jednoduchých ukázek...

- Pro nejbližší příklad induktivní definice se obrátíme na množinu všech přirozených čísel, která je formálně zavedena následovně.
  - $0 \in \mathbb{N}$
  - Je-li  $i \in \mathbb{N}$ , pak také  $\text{succ}(i) \in \mathbb{N}$  (kde následník  $\text{succ}(i)$  odpovídá  $i+1$ ).



- Pro každé  $y \in \mathbb{N}$  můžeme definovat jinou množinu  $M_y \subseteq \mathbb{N}$  induktivně:
  - $y \in M_y$
  - Jestliže  $x \in M_y$  a  $x + 1$  je liché, pak  $x + 2 \in M_y$ . □Pak například  $M_3 = \{3\}$ , nebo  $M_4 = \{4 + 2i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . □
- Dalším příkladem induktivní definice je už známé zavedení **výrokových formulí** z Oddílu 1.4. Uměli byste teď přesněji říci, co tam byly základní prvky a jaká byla induktivní pravidla? A jaká byla v definici formulí role závorek?

## Pokročilý ilustrační příklad

... zase na induktivní definici.

**Příklad 5.8.** V Růžovém království mají zvláštní peníze – používají mince pouze dvou hodnot, *tříkoruny* a *třináctikoruny*. □

- Určete induktivní definici množiny  $P$  všech celých kladných čísel, které lze jak peněžní částku složit z mincí v Růžovém království. (Uvažujte, že království má k dispozici neomezené množství mincí.) □
- Dokažte, že z mincí v Růžovém království lze složit jakoukoliv celou částku od 24 korun výše. □
- Chytrý Honza přijel do Růžového království a potřebuje si tam koupit jeden knoflík za korunu. Jak to může udělat a neprodělat?

a) Určete indukční definici množiny  $P$  všech celých kladných čísel, které lze jak peněžní částku složit z mincí v Růžovém království. (Uvažujte, že království má k dispozici neomezené množství mincí.)  $\square$

Například takto: **Bázičnými** prvky jsou  $3 \in P$  a  $13 \in P$ .  $\square$

K tomu přináležejí dvě **indukční** pravidla;

je-li  $a \in P$ , pak  $a + 3 \in P$  a také  $a + 13 \in P$ .  $\square$

b) Dokažte, že z mincí v Růžovém království lze složit jakoukoliv celou částku od 24 korun výše.  $\square$

V řešení úkolu postačí dokázat toto tvrzení matematickou indukcí:

**Věta.** Platí-li pro nějaké  $n \geq 24$ , že  $24, 25, \dots, n, n + 1, n + 2 \in P$ , pak také  $n + 3 \in P$ .  $\square$

**Důkaz:** V bázi indukce snadno vidíme, že částky  $24 = 3 \cdot 8$ ,  $25 = 13 + 3 \cdot 4$  a  $26 = 13 \cdot 2$  náleží do  $P$ , a proto tvrzení platí pro  $n = 24$ .  $\square$

V indukčním kroku z předpokladu  $n \in P$  přímo odvodíme  $n + 3 \in P$  (přidáme jednu tříkorunu) a jsme hotovi.

c) *Chytrý Honza přijel do Růžového království a potřebuje si tam koupit jeden knoflík za korunu. Jak to může udělat a neprodělat?*



Honza zaplatí 1 třináctikorunu a nechá si vrátit 4 tříkoruny (12). □



### **A na závěr jeden bonusový pro samostatné přemýšlení**

**Příklad 5.9.** *Jak byste dokázali jasně a srozumitelně (explicitně) popsat množinu  $D$  zadanou následující induktivní definicí? □*

- *Bázickými prvky jsou  $21 \in D$  a  $35 \in D$ .*
- *Máme dvě induktivní pravidla:*
  - \* *Jsou-li  $a, b \in D$  (je možné  $a = b$ ), pak také  $a + b \in D$ .*
  - \* *Jsou-li  $a, b \in D$  a platí  $a > b$ , pak také  $a - b \in D$ . □*

Pokud už máte odpověď, pak přemýšlejte, co se stane, když bázickými prvky bude jiná dvojice přirozených čísel. □

A co když v bázi zadáme trojici nebo čtveřici čísel? □