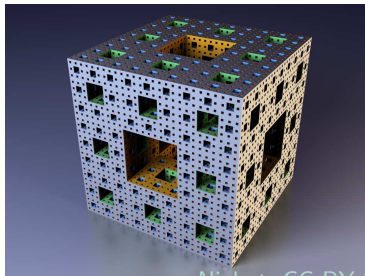


6 Strukturální indukce

Nyní se naplno ponoříme do hlubin induktivních definic a strukturální indukce, látky sice velmi abstraktní, ale pro informatiky potřebné.



Niabot, CC BY 3.0, via Wikimedia Commons

Stručný přehled lekce

- * Problematika jednoznačnosti induktivních definic množin.
- * Induktivní definice funkcí, použití strukturální indukce.
- * Nazpět k matematické logice:
sémantika výrokové logiky a formální převod do normálního tvaru.

Zopakování na začátek

Definice 6.0. Induktivní definice množiny.

Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných *bázických* prvků $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$. \square
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \dots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \dots, x_\ell)$ (v pravidle číslo i). \square

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující všem těmto pravidlům.



6.1 Jednoznačnost induktivních definic

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázeických prvků pomocí induktivních pravidel právě *jedním způsobem*. \square

- Induktivní definice množiny přirozených čísel \mathbb{N} je jasně jednoznačná. \square
- Podobně je jednoznačná následující definice množiny $M \subseteq \mathbb{N}$;
 - $2, 11 \in M$
 - Jestliže $x \in M$, pak také $x + 2 \in M$. \square

Avšak jednoznačná už není tato induktivní definice množiny $P \subseteq \mathbb{N}$;

- $2, 11 \in P$
- Jestliže $x \in P$, pak také $x + 3 \in P$.

Proč? \square To proto, že například prvek $11 \in P$ lze získat jednou jako bázeický prvek definice a podruhé z bázeického prvku $2 \in P$ trojí iterací pravidla ' $x + 3 \in P$ ' (a je mnoho jiných prvků majících více odvození v P). \square

- V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny“ pro odvozené vyšší definice, viz následující.

Příklad 6.1. Jednoznačnost induktivní definice 01-řetězců.

Nad binární abecedou $\Sigma = \{0,1\}$ induktivně definujeme speciální množinu řetězců $B \subseteq \Sigma^*$ následujícím předpisem:

- '0', '011' $\in B$ (bázické prvky). \square
- Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 0, pak také $x + '01' \in B$. \square
- Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 1, pak také $x + '00' \in B$.

\square

Dokažte, že uvedená definice množiny B je jednoznačná. \square

Zde je přirozené pro důkaz aplikovat **matematickou indukci**. Avšak na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n “, a proto musíme nejprve za něj definovat vhodnou náhradu, \square

- konkrétně „indukci podle délky odvození prvku $x \in B$ “, \square
- kterážto délka je definována jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $x \in B$. \square
- Přesně řečeno, naši indukci povedeme podle **struktury odvození prvků naší indukční množiny** a budeme tudíž mluvit o **strukturální indukci**.

- * '0', '011' $\in B$ (bázické prvky). \square
- * Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 0, pak také $x + '01' \in B$. \square
- * Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 1, pak také $x + '00' \in B$. \square

Důkaz: Nejprve musíme ověřit jednoznačnost definice množiny B pro její **bázické prvky**, tj. je třeba zkontrolovat, že žádný z bázických prvků případně nelze odvodit i některým(i) z pravidel. \square

Pro řetězec '0' $\in B$ je to jasné z jeho minimální délky, ale řetězec '011' $\in B$ by případně mohl být odvozený z předchozího z hlediska své délky. \square Avšak žádné pravidlo nedává řetězec končící znaky 11. Báze indukci je tak hotova. \square

V indukčním kroku předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny dříve odvozené prvky množiny B a nahlédneme na prvek $y \in B$ **dále odvozený** jedním z daných pravidel. \square

Nechť y končí znakem 0; pak $y \in B$ určitě musel být odvozen použitím „ $x + '00' \in B$ “ jako posledního pravidla. \square Je tedy jednoznačně $y = x + '00'$ a zároveň podle indukčního předp. byl řetězec $x \in B$ odvozen jednoznačně. \square Tudíž $y \in B$ je odvozen jednoznačně. \square

Obdobně postupujeme, pokud y končí znakem 1; pak $y \in B$ určitě musel být odvozen použitím „ $x + '01' \in B$ “ jako posledního pravidla. \square Je tedy jednoznačně $y = x + '01'$ a zase podle indukčního předpokladu byl řetězec $x \in B$ odvozen jednoznačně. Tudíž $y \in B$ je odvozen jednoznačně i v tomto případě. \square

6.2 Induktivní definice funkcí

Induktivně definovaná množina povětšinou nemá valný význam sama o sobě, avšak poskytuje **definiční obor** pro následnou induktivně definovanou funkci. □

Pro ilustraci z infromatického světa si vezměte, že induktivní definice množiny mnohdy definuje prostě jen **syntaxi**, tedy správný způsob zápisu nějaké instrukce či programu, □ale k tomu je nutno také podat definici **sémantiky**, tedy významu toho správně zapsaného – co se má vlasně provést nebo vykonat. □

Definice 6.2. Induktivní definice funkce z induktivní množiny.

Nechť množina M je dána **jednoznačnou** induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F} : M \rightarrow X$ je definována **induktivně** (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázičických prvků $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu
“Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \dots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \dots, x_\ell) \in M$ ”
je definováno
 $\mathcal{F}(f(x_1, \dots, x_\ell))$ na základě hodnot $\mathcal{F}(x_1), \dots, \mathcal{F}(x_\ell)$.

Ilustrační příklady

Ilustrujme si induktivní definici funkce dětskou hrou na „tichou poštu“. Definičním oborem je řada sedících hráčů, kde ten první je bázickým prvkem a každý následující (mimo posledního) odvozuje hráče sedícího hned za ním (nebo vedle) jako další prvek hry. □

Hodnotou bázického prvku je první (vymyšlené) posílané slovo. Induktivní pravidlo pak následujícímu hráči přiřazuje slovo, které je odvozeno („zkomolením“) ze slova předchozího hráče. Výsledkem hry pak je hodnota–slovo posledního hráče.

Pro další příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test`
`EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status. It is one of:  
 ( EXPRESSION )           EXPRESSION is true  
 ! EXPRESSION             EXPRESSION is false  
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2 both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true  
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2 either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true  
 [-n] STRING              the length of STRING is nonzero  
 STRING1 = STRING2        the strings are equal  
 .....
```

□

No, problematická je otázka jednoznačnosti této definice – jednoznačnost není vynucena (jen umožněna) syntaktickými pravidly, jinak je pak dána nepsanými konvencemi implementace příkazu.

To je pochopitelně z matematického hlediska špatně, ale přesto jde o pěknou ukázkou z praktického života informatika.

6.3 Použití strukturální indukce

Strukturální indukce je matematickou indukcí jako každá předchozí indukce.

Hned je však vidět na první pohled zásadní rozdíl, nemáme zde žádný „parametr n “, podle kterého bychom indukci přirozeně vedli. □

Místo explicitního parametru problému indukci pak vedeme podle *délky odvození (počtu použitých induktivních pravidel) prvku induktivní množiny*. □

Definice: Mějme induktivně definovanou množinu M a na jejích prvcích formulované tvrzení $T(m)$, kde $m \in M$. □ Tvrzení $T(m)$ dokazujeme *strukturální indukci* podle množiny M takto:

- Dokážeme platnost $T(m_0)$ pro každý bázický prvek $m_0 \in M$. □
- Pro každý nebázický prvek $m \in M$ vybereme induktivní pravidlo odvozující $m \in M$ z prvků $m_1, \dots, m_k \in M$ a předpokládáme platnost tvrzení $T(m_i)$ pro všechna $i = 1, \dots, k$. □

Z těchto předpokladů pak dokážeme platnost tvrzení $T(m)$. □

Poznámka: Někdy může nastat (ale ne v jednoznačných definicích), že prvek $m \in M$ vyplývá z více induktivních pravidel určujících množinu M . Nemusíte dokazovat indukční krok pro každé pravidlo vedoucí k $m \in M$, nýbrž vám stačí si vybrat jedno.

Příklad 6.3. Induktivní definice na přirozených číslech následníkem.

Vzpomeňte si z Oddílu 5.3, že přirozená čísla lze definovat induktivně bázickým prvkem $0 \in \mathbb{N}$ a pravidlem $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow succ(n) \in \mathbb{N}$. Pišme zkráceně $s(n)$ místo $succ(n)$.



Na množině \mathbb{N} definujme funkci $f(n)$ takto

- $f(0) = 0$, \square
- pokud $n \in \mathbb{N}$, tak $f(s(n)) = s(s(f(n)))$. \square

Dokažte, že $f(n) = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. \square

Důkaz: V bázi skutečně platí $f(0) = 0 = 2 \cdot 0$. \square

Pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ pak můžeme (viz induktivní pravidlo) předpokládat, že $f(n) = 2n$ platí. Z tohoto předpokladu pak přímočaře odvozujeme hodnotu $f(s(n))$ takto \square $f(s(n)) = s(s(f(n))) = s(s(2n)) = s(2n + 1) = 2n + 2 = 2(n + 1)$. \square

A jelikož přirozeně $f(s(n)) = f(n + 1)$, tvrzení $f(n + 1) = 2(n + 1)$ platí a jsme s důkazem hotovi. \square

Příklad 6.4. Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \odot, \oplus, (,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

- * Dekadický zápis každého přirozeného čísla n je prvkem $SExp$ (bázické prvky). \square
- * Jestliže $x, y \in SExp$, pak také $(x) \odot (y)$ a $(x) \oplus (y)$ jsou prvky $SExp$. \square
- * Jak snadno nahlédneme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoduchých výrazů $SExp$ *jednoznačná*.

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy *syntaxi*. \square

Pro přiřazení „významu“, tj. *sémantiky* aritmetického výrazu, následně definujme funkci vyhodnocení $Val : SExp \rightarrow \mathbb{N}$ induktivně takto: \square

- * Pro bázické prvky: $Val(n) = n$, kde n je dekadický zápis přirozeného čísla n . \square
- * První induktivní pravidlo: $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$.
- * Druhé induktivní pravidlo: $Val((x) \odot (y)) = Val(x) \cdot Val(y)$. \square

Co je pak „správným významem“ (*hodnotou*) uvedených aritmetických výrazů? \square

Příklad 6.5. Důkaz správnosti přiřazeného „významu“ $Val : SExp \rightarrow \mathbb{N}$.

Věta. Pro každý výraz $\sigma \in SExp$ je hodnota $Val(\sigma)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu σ podle běžných zvyklostí aritmetiky. \square

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení základních prvků. Platí $Val(n) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky. \square

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$. \square Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $Val((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x , což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y , což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(y)$. \square Takže skutečně $Val((x) \oplus (y)) = Val(x) + Val(y)$. \square

Druhé pravidlo $Val((x) \odot (y))$ se zpracuje analogicky. Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $Val((x) \odot (y))$ měla být rovna součinu vyhodnocení výrazu x , což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(x)$, a vyhodnocení výrazu y , což je podle indukčního předpokladu rovno $Val(y)$. \square Opět tedy správně platí $Val((x) \odot (y)) = Val(x) \cdot Val(y)$. \square

6.4 Nazpět k matematické logice

Vybaveni aparátem induktivních definic, můžeme nyní podat matematicky přesnější definici formulí výrokové logiky z Oddílu 1.4 a jejich sémantiky.

Definice: Necht' $\mathcal{P} = \{A, B, C, \dots\}$ je množina výrokových proměnných. Množina \mathcal{F} výrokových formulí je dána těmito pravidly induktivní definice:

- * Bázickými prvky \mathcal{F} jsou proměnné \mathcal{P} , tj. $X \in \mathcal{F}$ pro každé $X \in \mathcal{P}$. \square
- * (*negace*) Je-li $\varphi \in \mathcal{F}$, pak také $\neg(\varphi)$ je prvkem \mathcal{F} . \square
- * (*implikace*) Je-li $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, pak také $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$ je prvkem \mathcal{F} . \square

Zároveň platí, že závorky okolo φ lze vynechat pouze pokud $\varphi \in \mathcal{P}$ nebo φ bylo vytvořeno induktivním pravidlem negace. To stejné platí pro vynechávání závorek okolo ψ . \square

Poznámka: Již nad rámec předchozí definice patří dříve uvedené syntaktické zkratky

- * $(\varphi) \vee (\psi)$ (*disjunkce* / „nebo“) je jiný zápis formule $\neg(\varphi) \Rightarrow (\psi)$,
- * $(\varphi) \wedge (\psi)$ (*konjunkce* / „a“) je jiný zápis formule $\neg(\neg(\varphi) \vee \neg(\psi))$,
- * $(\varphi) \Leftrightarrow (\psi)$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $((\varphi) \Rightarrow (\psi)) \wedge ((\psi) \Rightarrow (\varphi))$.

Sémantika výrokové logiky

Na základě **jednoznačné** induktivní definice množiny \mathcal{F} výrokových formulí nyní můžeme podat přesnou induktivní definici funkce vyhodnocení (logické hodnoty formulí). Necht' **valuace** (ohodnocení) je funkce $\nu : \mathcal{P} \rightarrow \{0, 1\}$. \square

Definice 6.6. Sémantika (význam) výrokové logiky.

Pro každou valuaci ν definujeme funkci

$$\mathcal{S}_\nu : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\},$$

zvanou **vyhodnocení** formule σ vzhledem k ν , \square induktivně takto:

- $\mathcal{S}_\nu(X) := \nu(X)$ pro každé $X \in \mathcal{P}$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg(\varphi)) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu((\varphi) \Rightarrow (\psi)) := \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Převod formulí do normálního tvaru

V dalším se vrátíme k logickým formulím v normálním tvaru (viz Oddíl 2.2), tedy k formulím, ve kterých se negace vztahuje pouze k výrokovým proměnným.

Tvrzení 6.7. Každou výrokovou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k \Rightarrow povolíme i užívání odvozených spojek \wedge a \vee . \square

- Pro ilustraci, k formuli $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní normální tvar $A \wedge \neg B$, \square
- k formuli $\neg(C \wedge (\neg A \Rightarrow B))$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$, \square
- k formuli $\neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \wedge \neg C$.

Metoda 6.8. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.

Používáme $\mathcal{F}(X)$ jako „je pravda, že X “ a $\mathcal{G}(X)$ jako „není pravda, že X “.

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}(A) & = A & \mathcal{G}(A) & = \neg A \\ \mathcal{F}(\neg\varphi) & = \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = \mathcal{F}(\varphi) \\ \mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\ \mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) & = \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi) \\ \mathcal{F}(\varphi \vee \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) & = \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\ \mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{G}(\psi) \square \end{array}$$

Pro predikátové formule toto rozšíříme ještě o pravidla:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}(\forall x. \varphi) & = \forall x. \mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x. \varphi) & = \exists x. \mathcal{G}(\varphi) \\ \mathcal{F}(\exists x. \varphi) & = \exists x. \mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x. \varphi) & = \forall x. \mathcal{G}(\varphi) \square \end{array}$$

Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím uvedeného postupu získáme:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) & = \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = \square \\ \mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) & = \square \\ A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) & = A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) & = \square \\ A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) & = A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) & = \square \\ A \wedge (B \vee (C \wedge A)) & & \end{array}$$

Důkaz pro normální tvar formule

Na závěr následuje další ilustrativní ukázka důkazu strukturální indukcí.

Věta 6.9. Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí (viz Metoda 6.8), že

- a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní φ
- b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$. \square

Důkaz provedeme **indukcí ke struktuře formule**, neboli indukci provedeme podle „délky“ ℓ – počtu aplikací indukčních pravidel při sestavování formule φ . \square

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$. \square
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ . Vezmeme si formuli ψ délky $\ell + 1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:

* $\psi \equiv \neg\varphi$.

Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. \square

Obdobně pro funktor \mathcal{G} vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 1.10. \square

* $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$.

Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2 . Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky \Rightarrow je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$. \square

Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož \wedge je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2 . Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.

* $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.

Zde si musíme opět uvědomit, že spojka \vee je pro nás jen zkratka (ale nelze ji v důkaze opomenout, neboť Metoda 6.8 ji používá ve svých induktivních pravidlech), a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formulí $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$. \square

* $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky. \square