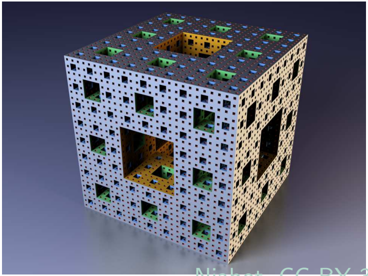
6 Strukturální indukce

Nyní se naplno ponoříme do hlubin induktivních definic a strukturální indukce, látky sice velmi abstraktní, ale pro informatiky potřebné.



Stručný přehled lekce

* Problematika jednoznačnosti induktivních definic množin.
* Induktivní definice funkcí, použití strukturální indukce.
* Nazpět k matematické logice:
  sémantika výrokové logiky a formální převod do normálního tvaru.

Zopakování na začátek

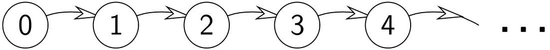
Definice 6.0. Induktivní definice množiny.
Jedná se obecně o popis (nějaké) množiny M v následujícím tvaru:

- Je dáno několik pevných *bázických* prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$.
- Je dán soubor *induktivních pravidel* typu

  Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $y \in M$.

  V tomto případě je y typicky funkcí $y = f_i(x_1, \ldots, x_\ell)$ (v pravidle číslo i).

Pak naše *induktivně definovaná množina* M je určena jako nejmenší (inkluzí) množina vyhovující všem těmto pravidlům.



6.1 Jednoznačnost induktivních definic

Definice: Řekneme, že daná induktivní definice množiny M je *jednoznačná*, právě když každý prvek M lze odvodit z bázických prvků pomocí induktivních pravidel právě jedním způsobem. □

- Induktivní definice množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ je jasně jednoznačná. □
- Podobně je jednoznačná následující definice množiny $M \subseteq \mathbb{N}$;
  - $2, 11 \in M$
  - Jestliže $x \in M$, pak také $x + 2 \in M$. □

  Avšak jednoznačná už není tato induktivní definice množiny $P \subseteq \mathbb{N}$;
  - $2, 11 \in P$
  - Jestliže $x \in P$, pak také $x + 3 \in P$.

  Proč? □To proto, že například prvek $11 \in P$ lze získat jednou jako bázický prvek definice a podruhé z bázického prvku $2 \in P$ trojí iterací pravidla '$x + 3 \in P$' (a je mnoho jiných prvků majících více odvození v P). □
- V čem tedy spočívá důležitost jednoznačných induktivních definic množin? Je to především v dalším možném využití induktivní definice množiny jako „základny" pro odvozené vyšší definice, viz následující.

Příklad 6.1. *Jednoznačnost induktivní definice 01-řetězců.*

Nad binární abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$ induktivně definujeme speciální množinu řetězců $B \subseteq \Sigma^*$ následujícím předpisem:

- '0', '011' $\in B$ (bázické prvky). □
- Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 0, pak také $x +$ '01' $\in B$. □
- Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 1, pak také $x +$ '00' $\in B$.

□

Dokažte, že uvedená definice množiny B je jednoznačná. □

Zde je přirozené pro důkaz aplikovat matematickou indukci. Avšak na rozdíl od dříve probíraných příkladů zde nevidíme žádný celočíselný „parametr n“, a proto musíme nejprve za něj definovat vhodnou náhradu, □

- konkrétně „indukci podle délky odvození prvku $x \in B$“, □
- kterážto délka je definována jako počet aplikací induktivních pravidel potřebných k odvození $x \in B$. □

- Přesně řečeno, naši indukci povedeme podle struktury odvození prvků naší induktivní množiny a budeme tudíž mluvit o *strukturální indukci*.

* $\text{`0'}, \text{`011'} \in B$ (bázické prvky).
* Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 0, pak také $x + \text{`01'} \in B$.
* Jestliže $x \in B$ a řetězec x končí znakem 1, pak také $x + \text{`00'} \in B$.

Důkaz: Nejprve musíme ověřit jednoznačnost definice množiny B pro její bázické prvky, tj. je třeba zkontrolovat, že žádný z bázických prvků případně nelze odvodit i některým(i) z pravidel.

Pro řetězec $\text{`0'} \in B$ je to jasné z jeho minimální délky, ale řetězec $\text{`011'} \in B$ by případně mohl být odvozený z předchozího z hlediska své délky. Avšak žádné pravidlo nedává řetězec končící znaky 11. Báze indukci je tak hotova.

V indukčním kroku předpokládáme, že tvrzení platí pro všechny dříve odvozené prvky množiny B a nahlédneme na prvek $y \in B$ dále odvozený jedním z daných pravidel.

Nechť y končí znakem 0; pak $y \in B$ určitě musel být odvozen použitím „$x + \text{`00'} \in B$“ jako posledního pravidla. Je tedy jednoznačně $y = x + \text{`00'}$ a zároveň podle indukčního předp. byl řetězec $x \in B$ odvozen jednoznačně. Tudíž $y \in B$ je odvozen jednoznačně.

Obdobně postupujeme, pokud y končí znakem 1; pak $y \in B$ určitě musel být odvozen použitím „$x + \text{`01'} \in B$“ jako posledního pravidla. Je tedy jednoznačně $y = x + \text{`01'}$ a zase podle indukčního předpokladu byl řetězec $x \in B$ odvozen jednoznačně. Tudíž $y \in B$ je odvozen jednoznačně i v tomto případě. □

6.2 Induktivní definice funkcí

Induktivně definovaná množina povětšinou nemá valný význam sama o sobě, avšak poskytuje definiční obor pro následnou induktivně definovanou funkci. □

Pro ilustraci z informatického světa si vezměte, že induktivní definice množiny mnohdy definuje prostě jen syntaxi, tedy správný způsob zápisu nějaké instrukce či programu, □ale k tomu je nutno také podat definici sémantiky, tedy významu toho správně zapsaného – co se má vlasně provést nebo vykonat. □

Definice 6.2. **Induktivní definice funkce** z induktivní množiny.
Nechť množina M je dána jednoznačnou induktivní definicí. Pak říkáme, že funkce $\mathcal{F}: M \to X$ je definována *induktivně* (vzhledem k induktivní definici M), pokud je řečeno:

- Pro každý z bázických prvků $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$ je určeno $\mathcal{F}(a_i) = c_i$. □
- Pro každé induktivní pravidlo typu
  "Jsou-li (libovolné prvky) $x_1, \ldots, x_\ell \in M$, pak také $f(x_1, \ldots, x_\ell) \in M$"
  je definováno
  $\boldsymbol{\mathcal{F}\big(\, f(x_1, \ldots, x_\ell)\,\big)}$ na základě hodnot $\boldsymbol{\mathcal{F}(x_1), \ldots, \mathcal{F}(x_\ell)}$.□

Ilustrační příklady

Ilustrujme si induktivní definici funkce dětskou hrou na „tichou poštu“. Definičním oborem je řada sedících hráčů, kde ten první je bázickým prvkem a každý následující (mimo posledního) odvozuje hráče sedícího hned za ním (nebo vedle) jako další prvek hry. □

Hodnotou bázického prvku je první (vymyšlené) posílané slovo. Induktivní pravidlo pak následujícímu hráči přiřazuje slovo, které je odvozeno („zkomolením“) ze slova předchozího hráče. Výsledkem hry pak je hodnota–slovo posledního hráče.

Pro další příklad se podívejme třeba do manuálu unixového příkazu `test EXPRESSION`:

```
EXPRESSION is true or false and sets exit status.  It is one of:
 ( EXPRESSION )                 EXPRESSION is true
 ! EXPRESSION                   EXPRESSION is false
 EXPRESSION1 -a EXPRESSION2     both EXPRESSION1 and EXPRESSION2 are true
 EXPRESSION1 -o EXPRESSION2     either EXPRESSION1 or EXPRESSION2 is true
 [-n] STRING                    the length of STRING is nonzero
 STRING1 = STRING2              the strings are equal
   ......
```

No, problematická je otázka jednoznačnosti této definice – jednoznačnost není vynucena (jen umožněna) syntaktickými pravidly, jinak je pak dána nepsanými konvencemi implementace příkazu.

To je pochopitelně z matematického hlediska špatně, ale přesto jde o pěknou ukázku z praktického života informatika.

6.3 Použití strukturální indukce

Strukturální indukce je matematickou indukcí jako každá předchozí indukce.

Hned je však vidět na první pohled zásadní rozdíl, nemáme zde žádný „parametr n“, podle kterého bychom indukci přirozeně vedli. □

Místo explicitního parametru problému indukci pak vedeme podle délky odvození (počtu použitých induktivních pravidel) prvku induktivní množiny. □

Definice: Mějme induktivně definovanou množinu M a na jejích prvcích formulované tvrzení $T(m)$, kde $m \in M$. □Tvrzení $T(m)$ dokazujeme *strukturální indukcí* podle množiny M takto:

- Dokážeme platnost $T(m_0)$ pro každý bázický prvek $m_0 \in M$. □
- Pro každý nebázický prvek $m \in M$ vybereme induktivní pravidlo odvozující $m \in M$ z prvků $m_1, \ldots, m_k \in M$ a předpokládáme platnost tvrzení $T(m_i)$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$. □
  Z těchto předpokladů pak dokážeme platnost tvrzení $T(m)$. □

Poznámka: Někdy může nastat (ale ne v jednoznačných definicích), že prvek $m \in M$ vyplývá z více induktivních pravidel určujících množinu M. Nemusíte dokazovat indukční krok pro každé pravidlo vedoucí k $m \in M$, nýbrž vám stačí si vybrat jedno.

Příklad 6.3. *Induktivní definice na přirozených číslech následníkem.*

Vzpomeňte si z Oddílu 5.3, že přirozená čísla lze definovat induktivně bázickým prvkem $0 \in \mathbb{N}$ a pravidlem $n \in \mathbb{N} \rightsquigarrow succ(n) \in \mathbb{N}$. Pišme zkráceně $s(n)$ místo $succ(n)$.

Na množině $\mathbb{N}$ definujme funkci $f(n)$ takto

- $f(0) = 0$,
- pokud $n \in \mathbb{N}$, tak $f(s(n)) = s(s(f(n)))$.

Dokažte, že $f(n) = 2n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Důkaz: V bázi skutečně platí $f(0) = 0 = 2 \cdot 0$.

Pro jakékoliv $n \in \mathbb{N}$ pak můžeme (viz induktivní pravidlo) předpokládat, že $f(n) = 2n$ platí. Z tohoto předpokladu pak přímočaře odvozujeme hodnotu $f(s(n))$ takto $f(s(n)) = s(s(f(n))) = s(s(2n)) = s(2n+1) = 2n+2 = 2(n+1)$.

A jelikož přirozeně $f(s(n)) = f(n+1)$, tvrzení $f(n+1) = 2(n+1)$ platí a jsme s důkazem hotovi. □

Příklad 6.4. *Jednoduché aritmetické výrazy a jejich význam.*

Nechť je dána abeceda $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \odot, \oplus, (,)\}$. Definujme množinu *jednoduchých výrazů* $SExp \subseteq \Sigma^*$ induktivně takto:

* Dekadický zápis každého přirozeného čísla **n** je prvkem $SExp$ (bázické prvky). □
* Jestliže $x, y \in SExp$, pak také $(x) \odot (y)$ a $(x) \oplus (y)$ jsou prvky $SExp$. □
* Jak snadno nahlédneme, díky nucenému závorkování je tato induktivní definice jednoduchých výrazů $SExp$ jednoznačná.

Tímto jsme aritmetickým výrazům přiřadili jejich „formu“, tedy *syntaxi*. □

Pro přiřazení „významu“, tj. *sémantiky* aritmetického výrazu, následně definujme funkci vyhodnocení *Val* : $SExp \to \mathbb{N}$ induktivně takto: □

* Pro bázické prvky: *Val*(**n**) $= n$, kde **n** je dekadický zápis přirozeného čísla n. □
* První induktivní pravidlo: *Val*$((x) \oplus (y)) =$ *Val*$(x) +$ *Val*(y).
* Druhé induktivní pravidlo: *Val*$((x) \odot (y)) =$ *Val*$(x) \cdot$ *Val*(y). □

Co je pak „správným významem“ (hodnotou) uvedených aritmetických výrazů? □

Příklad 6.5. *Důkaz správnosti přiřazeného „významu“ $\mathit{Val} : \mathit{SExp} \to \mathbb{N}$.*

Věta. *Pro každý výraz $\sigma \in \mathit{SExp}$ je hodnota $\mathit{Val}(\sigma)$ číselně rovna výsledku vyhodnocení výrazu σ podle běžných zvyklostí aritmetiky.* □

Důkaz: V bázi indukce ověříme vyhodnocení bázických prvků. Platí $\mathit{Val}(\mathbf{n}) = n$, což skutečně odpovídá zvyklostem aritmetiky. □

V indukčním kroku se podíváme na vyhodnocení $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. □ Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $\mathit{Val}((x) \oplus (y))$ měla být rovna součtu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(x)$ (x má zřejmě kratší délku odvození), a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(y)$. □ Takže skutečně $\mathit{Val}((x) \oplus (y)) = \mathit{Val}(x) + \mathit{Val}(y)$. □

Druhé pravidlo $\mathit{Val}((x) \odot (y))$ se zpracuje analogicky. Podle běžných zvyklostí aritmetiky by hodnota $\mathit{Val}((x) \odot (y))$ měla být rovna součinu vyhodnocení výrazu x, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(x)$, a vyhodnocení výrazu y, což je podle indukčního předpokladu rovno $\mathit{Val}(y)$. □ Opět tedy správně platí $\mathit{Val}((x) \odot (y)) = \mathit{Val}(x) \cdot \mathit{Val}(y)$.

□

6.4 Nazpět k matematické logice

Vybaveni aparátem induktivních definic, můžeme nyní podat matematicky přesnější definici formulí výrokové logiky z Oddílu 1.4 a jejich sémantiky.

Definice: Nechť $\mathcal{P} = \{A, B, C, \dots\}$ je množina výrokových proměnných. Množina $\mathcal{F}$ výrokových formulí je dána těmito pravidly induktivní definice:

- Bázickými prvky $\mathcal{F}$ jsou proměnné $\mathcal{P}$, tj. $X \in \mathcal{F}$ pro každé $X \in \mathcal{P}$. □
- (*negace*) Je-li $\varphi \in \mathcal{F}$, pak také $\neg(\varphi)$ je prvkem $\mathcal{F}$.□
- (*implikace*) Je-li $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$, pak také $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$ je prvkem $\mathcal{F}$.□

Zároveň platí, že závorky okolo φ lze vynechat pouze pokud $\varphi \in \mathcal{P}$ nebo φ bylo vytvořeno induktivním pravidlem negace. To stejné platí pro vynechávání závorek okolo ψ. □

Poznámka: Již nad rámec předchozí definice patří dříve uvedené syntaktické zkratky

- $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce* / „nebo") je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$,
- $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce* / „a") je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
- $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Sémantika výrokové logiky

Na základě jednoznačné induktivní definice množiny $\mathcal{F}$ výrokových formulí nyní můžeme podat přesnou induktivní definici funkce vyhodnocení (logické hodnoty formulí). Nechť *valuace* (ohodnocení) je funkce $\nu : \mathcal{P} \to \{0, 1\}$. □

Definice 6.6. Sémantika (význam) výrokové logiky.
Pro každou valuaci ν definujeme funkci

$$\mathcal{S}_\nu : \mathcal{F} \to \{0, 1\},$$

zvanou *vyhodnocení* formule σ vzhledek k ν, □induktivně takto:

- $\mathcal{S}_\nu(X) := \nu(X)$ pro každé $X \in \mathcal{P}$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) := \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) := \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Převod formulí do normálního tvaru

V dalším se vrátíme k logickým formulím v normálním tvaru (viz Oddíl 2.2), tedy k formulím, ve kterých se negace vztahuje pouze k výrokovým proměnným.

Tvrzení 6.7. *Každou výrokovou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k $\Rightarrow$ povolíme i užívání odvozených spojek $\wedge$ a $\vee$.* □

- Pro ilustraci, k formuli $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní normální tvar $A \wedge \neg B$, □
- k formuli $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$, □
- k formuli $\neg\big((A \Rightarrow B) \Rightarrow C\big)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \wedge \neg C$.

Metoda 6.8. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Používáme $\mathcal{F}(X)$ jako „je pravda, že X“ a $\mathcal{G}(X)$ jako „není pravda, že X“.

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\mathcal{F}(A) & = & A & \mathcal{G}(A) & = & \neg A \\
\mathcal{F}(\neg\varphi) & = & \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{G}(\psi)\square
\end{array}$$

Pro predikátové formule toto rozšíříme ještě o pravidla:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\mathcal{F}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{G}(\varphi)\square
\end{array}$$

Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím uvedeného postupu získáme:

$$\begin{array}{lcll}
\mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) & = & \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = \square \\
\mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) & = \square \\
A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) & = \square \\
A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) & = & A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) & = \square \\
A \wedge (B \vee (C \wedge A)) & & &
\end{array}$$

Důkaz pro normální tvar formule

Na závěr následuje další ilustrativní ukázka důkazu strukturální indukcí.

Věta 6.9. *Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí (viz Metoda 6.8), že*

a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní k φ

b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$. □

Důkaz povedeme indukcí ke struktuře formule, neboli indukci povedeme podle „délky“ ℓ – počtu aplikací induktivních pravidel při sestavování formule φ. □

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$. □
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ. Vezmeme si formuli ψ délky $\ell+1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:

* $\psi \equiv \neg\varphi$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. $\square$
  Obdobně pro funktor $\mathcal{G}$ vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 1.10. $\square$

* $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2. Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky $\Rightarrow$ je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$. $\square$
  Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož $\wedge$ je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2. Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.

* $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
  Zde si musíme opět uvědomit, že spojka $\vee$ je pro nás jen zkratka, a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formuli $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$. $\square$

* $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky.

$\square$