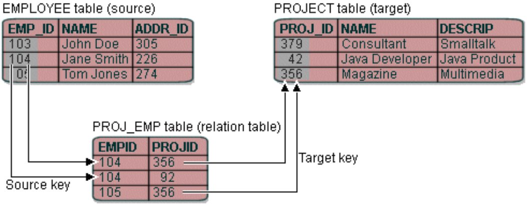
7 Relace a jejich vlastnosti

V následující lekci si podrobně rozebereme matematický aparát relací, kterému se v jeho abstraktní podobě mnoho pozornosti v dřívější výuce nevěnuje – na rozdíl od naivního pohledu na množiny a na „funkce“ ve významu analytických funkcí (jako $2x$, $\sin x$). Přitom na pojem relace velmi brzy narazí každý informatik už jen při studiu dat a databází a jeho pochopení bude nezbytně potřebovat.



Stručný přehled lekce

* Co je relace – reprezentace relací tabulkou a grafem.
* Základní vlastnosti binárních relací nad množinou.
* Uzávěry relací. Tranzitivní relace.

Zopakování kartézského součinu a relace

Definice: *Kartézský součin* dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}\,. \square$$

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, a_2, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \leq i \leq k\}\,.$$

- Například $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$. $\square$

Definice: *Relace* mezi množinami $A_1, A_2, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k\,. \square$$

Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci R na A*.

7.1 Reprezentace konečných relací

Ukládání dat – především sleduje vztahy mezi objekty (stejně jako relace).

$\rightsquigarrow$ relační databáze jako obecná ukázka použití relace.

Příklad 7.1. *Tabulka relační databáze prezentuje obecnou relaci.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- ZNAK $= \{a, \cdots, z, A, \cdots, Z, mezera\}$,
- CISLICE $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- JMENO $=$ ZNAK^{15}, PRIJMENI $=$ ZNAK^{20}, VEK $=$ CISLICE^{3},
- ZAMESTNANEC „$\in$“ JMENO $\times$ PRIJMENI $\times$ VEK. □

Relaci „typu“ ZAMESTNANEC pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

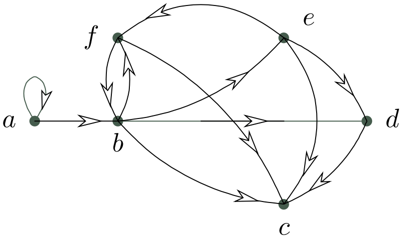
□

Reprezentace binárních relací na množině

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině (tj. na papíře).
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b. Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a. □

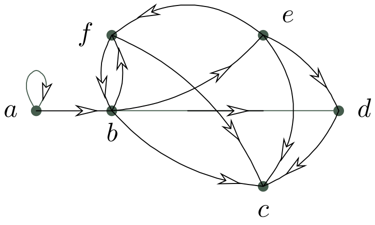
Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé třeba z matematické analýzy. □

V případě, že M je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží také na míře „pravidelnosti“ R).

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *matice* relace – matice $\boldsymbol{A}$ typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0,1\}$.



$$\rightarrow \quad \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}$$

A závěrem se můžeme opět vrátit k reprezentaci tabulkou…

JMENO	PRIJMENI
Jan	Novák
Petr	Vichr
Pavel	Zíma
Stanislav	Novotný

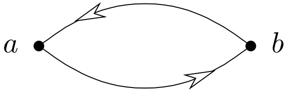
7.2 Vlastnosti binárních relací na množině

Definice 7.2. Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

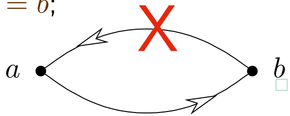
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;

- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;

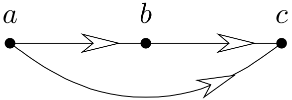
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



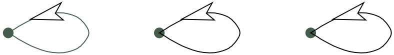
- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a,b),(b,a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a,b),(b,c) \in R$, pak také $(a,c) \in R$.



Pozor, může být relace symetrická i antisymetrická zároveň?



Ano!

Ukázkové binární relace

Příklad 7.3. *Jak poznat vlastnosti relací z matice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Které z vlastností mají binární relace reprezentované těmito maticemi? □

Řešení: Ony vlastnosti si probereme jednu po druhé:

- Reflexivní, právě když každý prvek na hlavní diagonále je 1. □
- Ireflexivní, právě když je její hlavní diagonála vyplněna nulami. □
- Symetrická, právě když je „stejná“ v zrcadlovém obraze podle hl. diagonály. □
- Antisymetrická, právě když po „přeložení“ matice podle hlavní diagonály nebudou nikde mimo tuto diagonálu dvě jedničky „na sobě“. □
- Zbývá posoudit tranzitivitu, což není úplně jednoduché. . .

□

Příklad 7.4. *Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.*

Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo;
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme t. na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm;
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y;
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm);
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y.

□

Co dělat v situaci, že naše relace některou z poptávaných vlastností nemá, ale nám by se ta vlastnost hodila? V některých případech lze chybějící vlastnost relaci „doplnit“ pomocí takzvaného uzávěru.

- Například reflexivní uzávěr jednoduše přidá do relace všechny dvojice (x, x).
- Nebo symetrický uzávěr zahrne do relace všechny obrácené dvojice k existujícím dvojicím, čili všechny chybějící (x, y) pokud $(y, x) \in R$.

7.3 Uzávěry relací

Princip uzávěru binární relace:

- Naší snahou je danou relaci „obohatit“ o zvolenou vlastnost (například proto, že naše data o relaci jsou neúplná a vlastnost je tak poškozena). □
- Pochopitelně, ne každou vlastnost relace lze získat přidáváním dalších dvojic; naše uvažovaná vlastnost musí být *uzavíratelná*. □

Fakt: Libovolná kombinace vlastností reflexivita, symetrie, tranzitivita je uzavíratelná vlastnost.

Ireflexivita a antisymetrie naopak nejsou uzavíratelné vlastnosti. □

Věta 7.5. *Nechť V je uzavíratelná vlastnost binárních relací. Pak existuje jednoznačná minimální relace $R^V \supseteq R$ mající vlastnost V. Platí*

$$R^V = \bigcap_{S \supseteq R,\ S \text{ má } V \text{ na } M} S\,.$$

Tuto minimální relaci R^V s vlastností V nazýváme V-*uzávěr* relace R.

Tvrzení 7.6. Nechť R je binární relace na M. Pak platí následující poznatky.

- *Reflexivní uzávěr* R je přesně relace $R \cup \{(x,x) \mid x \in M\}$. $\square$
- *Symetrický uzávěr* R je přesně relace
$$\overleftrightarrow{R} = \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ nebo } (y,x) \in R\}. \square$$
- *Tranzitivní uzávěr* R je přesně relace $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je zobrazení, které pro každou binární relaci S vrátí relaci
$$\mathcal{T}(S) := S \cup \{(x,z) \mid \text{ existuje } y \text{ takové, že } (x,y),(y,z) \in S\}$$
a $\mathcal{T}^i(S) = \underbrace{\mathcal{T}(\mathcal{T}\ldots(\mathcal{T}}_{i}(S))\ldots)$ je i-krát iterovaná aplikace zobrazení $\mathcal{T}$. $\square$
- Reflexivní a tranzitivní uzávěr R je přesně relace $R^* = Q^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. $\square$
- Reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr R (tj. nejmenší ekvivalence obsahující R) je přesně relace $(\overleftrightarrow{Q})^+$, kde Q je reflexivní uzávěr R. $\square$

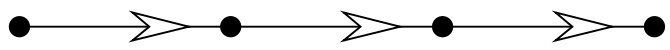
Poznámka: Na pořadí aplikování uzávěrů vlastností záleží! Zhruba řečeno, tranzitivní uzávěr obvykle aplikujeme coby poslední.

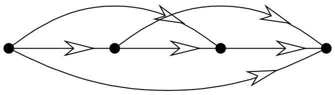
Tranzitivní uzávěr

Závěrem sezastavíme nad případem tranzitivního uzávěru $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, jehož definice se nezdá až tak „konstruktivní" – co nekonečné sjednocení? □

Tvrzení 7.7. *Nechť R je relace na konečné množině. Pak existuje přirozené m takové, že tranzitivní uzávěr relace R lze zapsat $R^+ = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{T}^i(R)$.* □

Důkaz: Pro něj si uvědomme zásadní fakt – pokud $\mathcal{T}^{i+1}(R) = \mathcal{T}^i(R)$, tak už platí $\mathcal{T}^{i+k}(R) = \mathcal{T}^i(R)$ pro všechna přirozená k. Neboli je potřeba sjednotit jen tolik prvních členů výrazu $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, dokud se hodnota $\mathcal{T}^i(R)$ „zvětšuje", což může nastat jen konečně krát nad konečnou množinou.





□

7.4 Tranzitivní relace

Mezi základními vlastnostmi relací popsanými Definicí 7.2 je jedna – tranzitivita, jejíž uchopení a zvládnutí je výrazně těžší než u ostatních vlastností. □

- Definice reflexivity, symetrie či antisymetrie nám ihned řeknou, které dvojice v relaci chybí nebo přebývají. □
- Avšak vlastnost tranzitivity je fundamentálně induktivní – všimněte si tranzitivního uzávěru, kde po každém přidání dvojice je nutno znovu podmínku tranzitivity kontrolovat, což „indukuje“ nové dvojice k přidávání. □

Tvrzení 7.8. *Mějme relaci R na kon. množině M a nechť R^+ je tranzitivním uz. R. Pak pro každé $x, y \in M$ platí $(x, y) \in R^+$ právě tehdy, když existují $z_0, z_1, \ldots, z_k \in M$ takové, že $z_0 = x, z_k = y$ a $(z_{i-1}, z_i) \in R$ pro $i = 1, \ldots, k$.* □

Tvrzení 7.8 o tranzitivním uzávěru R^+ je potřeba (neformálně) číst takto:

Do tranzitivního uzávěru patří všechny ty dvojice (x, y), že v původní relaci R se lze „dostat po šipkách“ z x do y. Pro ilustraci:

S tranzitivními relacemi (mezi objekty) se nejčastěji setkáváme, pokud tyto objekty porovnáváme vztahy „je stejný jako“ nebo „je větší/lepší než“. □

Definice 7.9. Daná binární relace R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní; □
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*). □

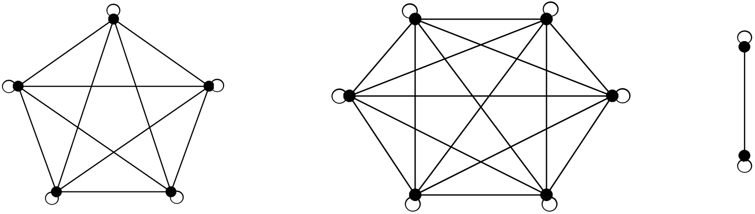
Příklad 7.10. *Jaké vlastnosti mají následující relace?*

- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y. □ (Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.) □
- Buď $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (Ekvivalence.) □
- Nechť $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Buď $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x. □ (Ireflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádáním.)

□

Příklad 7.11. *Jak vypadá graf relace ekvivalence?*

Poměrně příznačně, jak nám ukazuje následující obrázek (všimněte si absence šipek, která je dána symetrií relace).



Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“ (leží na stejné hromádce).

Tyto hromádky pak nazýváme komponentami či *třídami ekvivalence* dané relace.