

IB015 Neimperativní programování

Akumulační funkce, Typové třídy,
Časová složitost

Jiří Barnat
Libor Škarvada

Akumulační funkce

Pozorování

- Seznam je posloupnost oddělených prvků.
- Motivací akumuláčních funkcí je “spojit” jednotlivé prvky seznamu dohromady, tj. akumulovat informaci uloženou v těchto jednotlivých prvcích do jedné hodnoty.
- Počet prvků seznamu je variabilní, proto se tato akumulace realizuje pomocí binárního operátoru postupně.

Spojení hodnot v seznamu pomocí binární operace

$$\text{foldl1 } \oplus [x_1, x_2, \dots, x_n] \rightsquigarrow^* ((\dots (x_1 \oplus x_2) \dots) \oplus x_{n-1}) \oplus x_n$$

$$\text{foldr1 } \oplus [x_1, x_2, \dots, x_n] \rightsquigarrow^* x_1 \oplus (x_2 \oplus (\dots (x_{n-1} \oplus x_n) \dots))$$

Příklady použití

```
foldl1 (*) [1,2,3,4,5] ~> ... ~> 120
```

```
foldl1 (&&) [True, True, True, False, True] ~> ... ~> False
```

```
foldl1 (-) [2,3,2] ~> ... ~> -3
```

```
foldr1 (-) [2,3,2] ~> ... ~> 1
```

```
foldr1 (min) [18,12,23] ~> ... ~> 12
```

Funkce foldl1, foldr1 nejsou definovány pro []

```
foldl1 (*) [] ~> ERROR
```

```
foldr1 (&&) [] ~> ERROR
```

Na jednoprvkových seznamech je to identita s kontrolou typu

```
foldr1 (*) [0] ~> 0
```

```
foldr1 (*) [1] ~> 1
```

```
foldr1 (*) [True] ~> ERROR
```

Princip

- Akumulační funkce, které mají fungovat i na prázdných seznamech, vyžadují navíc **iniciální hodnotu** pro proces akumulace.
- Směr závorkování určuje i místo použití iniciální hodnoty.

Akumulace hodnot s využitím iniciální hodnoty

$$\text{foldl } \oplus \ v \ [x_1, x_2, \dots, x_n] \rightsquigarrow^* \left(\left(\dots \left((v \oplus x_1) \oplus x_2 \right) \dots \right) \oplus x_{n-1} \right) \oplus x_n$$

$$\text{foldr } \oplus \ v \ [x_1, x_2, \dots, x_n] \rightsquigarrow^* x_1 \oplus (x_2 \oplus (\dots (x_{n-1} \oplus (x_n \oplus v)) \dots))$$

Příklady

```
foldl (*) 0 [1,2,3,4,5] ~> ... ~> 0
```

```
foldl (&&) False [True, True, True, True] ~> ... ~> False
```

```
foldl (-) 0 [2,3,2] ~> ... ~> -7
```

```
foldr (-) 0 [2,3,2] ~> ... ~> 1
```

Aplikace na prázdné seznamy

```
foldl max 100 [] ~> ... ~> 100
```

```
foldr (++) "Nic" [] ~> ... ~> "Nic"
```

Výsledek může být opět seznam!

```
foldr (:) [] "Coze?" ~> ... ~> "Coze?"
```

```
foldr (\x y->(x+1):y) [100] [1,2,3] ~> ... ~> [2,3,4,100]
```

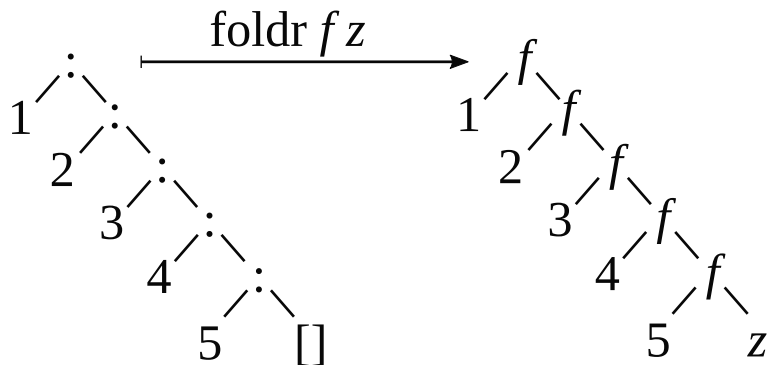
Definice akumuláčnicích funkcí

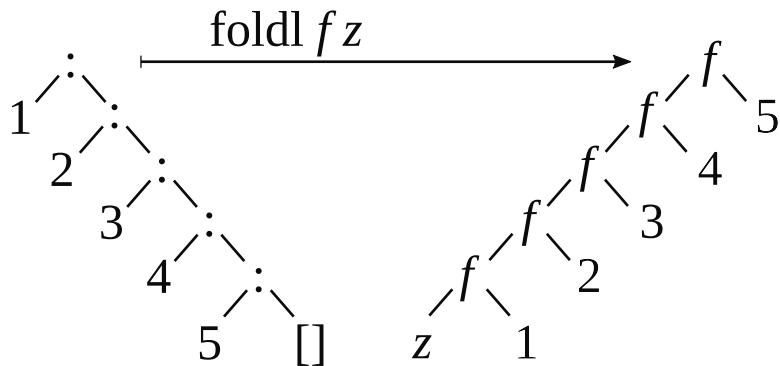
```
foldl :: (a -> b -> a) -> a -> [b] -> a
foldl _ v [] = v
foldl op v (x:s) = foldl op (v 'op' x) s
```

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
foldr _ v [] = v
foldr op v (x:s) = x 'op' foldr op v s
```

```
foldl1 :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
foldl1 op (x:s) = foldl op x s
```

```
foldr1 :: (a -> a -> a) -> [a] -> a
foldr1 _ [x] = x
foldr1 op (x:s) = x 'op' foldr1 op s
```





Katamorfismus

- Výraz vzniklý nahrazením hodnotových konstruktorů v nějaké hodnotě algebraického typu jinými funkcemi vhodné arity.
- Nově vzniklý výraz je následně možné vyhodnotit (pokud lze).

Katamorfismus na seznamech

- Realizován funkcí `foldr`.
- Porovnejte typy hodnotových konstruktorů seznamu

`(:)` :: `a -> [a] -> [a]`

`[]` :: `[a]`

s typem funkce `foldr`

`foldr` :: `(a -> b -> b) -> b -> [a] -> b`

Peanova čísla

- `data Nat = Succ Nat | Zero`

Katamorfismus na typu Nat

- `natFold :: (a -> a) -> a -> Nat -> a`
`natFold s z (Succ n) = s (natFold s z n)`
`natFold s z Zero = z`

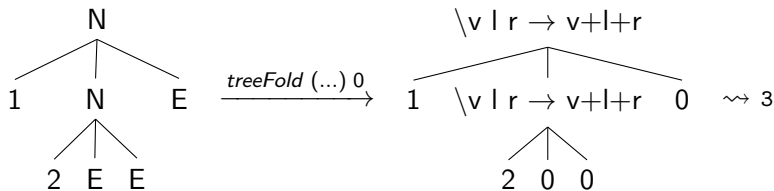
Příklad

- Katamorfismus: `Zero → 0`
`Succ → (1+)`
- `natFold (1+) 0 (Succ (Succ Zero)) \rightsquigarrow^* (1+) ((1+) 0) \rightsquigarrow^* 2`

Fold na binárních stromech

- `data BinTree a = Node a (BinTree a) (BinTree a) | Empty`
- `let tree = Node 1 (Node 2 Empty Empty) Empty in
treeFold (\v l r -> v+l+r) 0 tree
 \rightsquigarrow^* 1+(2+0+0)+0 \rightsquigarrow^* 3`

Graficky:



Typové třídy

Monomorfní typy

- `not :: Bool -> Bool`
`(&&) :: Bool -> Bool -> Bool`

Polymorfní typy

- `length :: [a] -> Int`
`flip :: (a -> b -> c) -> b -> a -> c`

Kvalifikované typy

- `(==), (/=) :: Eq a => a -> a -> Bool`
`sum, product :: Num a => [a] -> a`
`minimum, maximum :: Ord a => [a] -> a`
`print :: Show a => a -> IO ()`

Typové třídy

- Sdružují a identifikují typy se společnými vlastnostmi.
- Typová kvalifikace – `Ord`, `Nat`, `Eq`, `Show`, `Foldable`, ...

Programátorský význam

- Existence typových tříd umožňuje i ve striktně typovaných jazycích sdílet kód funkcí, které dělají totéž, avšak pracují s hodnotami různých typů.
- Sdílení kódu funkcí, které dělají totéž, by měl být **svatý grál** všech programátorů.



Typová třída Eq

- `class Eq a where`
 `(==), (/=) :: a -> a -> Bool`
 `x /= y = not (x == y)`

Přidružení typů k typové třídě (deklarace instance)

- `instance Eq Bool where`
 `False == False = True`
 `True == True = True`
 `_ == _ = False`
- `instance Eq Int where`
 `(==) = primEqInt`
- `instance (Eq a, Eq b) => Eq (a,b) where`
 `(x,y) == (u,v) = x == u && y == v`

Typová třída Ord využívající typovou třídu Eq

- `class (Eq a) => Ord a where`
 `(<=), (>=), (<), (>) :: a -> a -> Bool`
 `max, min :: a -> a -> a`
 `x >= y = y <= x`
 `x < y = x <= y && x /= y`
 `x > y = y < x`
 `max x y = if x >= y then x else y`
 `min x y = if x <= y then x else y`

Deklarace instance

- `instance Ord Bool where`
 `False <= _ = True`
 `_ <= True = True`
 `_ <= _ = False`
- `instance (Ord a, Ord b) => Ord (a,b) where`
 `(x,y) <= (u,v) = x < u || (x == u && y <= v)`

Pozorování

- Instanciací lze přenést vlastnosti typu na složené typy.

Příklad

- Rozšíření uspořadatelnosti hodnot typu na uspořadatelnost seznamů hodnot daného typu.
- ```
instance (Ord a) => Ord [a] where
 [] <= _ = True
 (_:_) <= [] = False
 (x:s) <= (y:t) = x < y || (x == y && s <= t)
```

## Definice typové třídy

- `class`  $[ (C_1 a, \dots, C_k a) \Rightarrow ] C a$   
 $\left[ \begin{array}{l} \text{where } op_1 :: typ_1 \\ \quad \vdots \\ op_n :: typ_n \\ \quad \left[ \begin{array}{l} default_1 \\ \quad \vdots \\ default_m \end{array} \right] \end{array} \right]$

## Deklarace instance

- `instance`  $[ (C_1 a_1, \dots, C_k a_k) \Rightarrow ] C typ$   
 $\left[ \begin{array}{l} \text{where } valdef_1 \\ \quad \vdots \\ valdef_n \end{array} \right]$

## Přetížení

- Má-li třída více než jednu instanci, jsou její funkce **přetíženy**.

## Přetížení operací

- Jedna operace je pro několik různých typů operandů definována obecně různým způsobem.
- To, která definice operace se použije při výpočtu, závisí na typu operandů, se kterými operace pracuje.
- Srovnej s parametricky polymorfními operacemi, které jsou definovány jednotně pro všechny typy operandů.

## Typová třída Num

- `class (Eq a, Show a) => Num a where`  
    `(+), (-), (*) :: a -> a -> a`  
    `negate, abs, signum :: a -> a`

## Přetížení operací při deklaraci instancí

- `instance Num Int where`  
    `(+) = primPlusInt`  
    `:`
- `instance Num Integer where`  
    `(+) = primPlusInteger`  
    `:`
- `instance Num Float where`  
    `(+) = primPlusFloat`  
    `:`

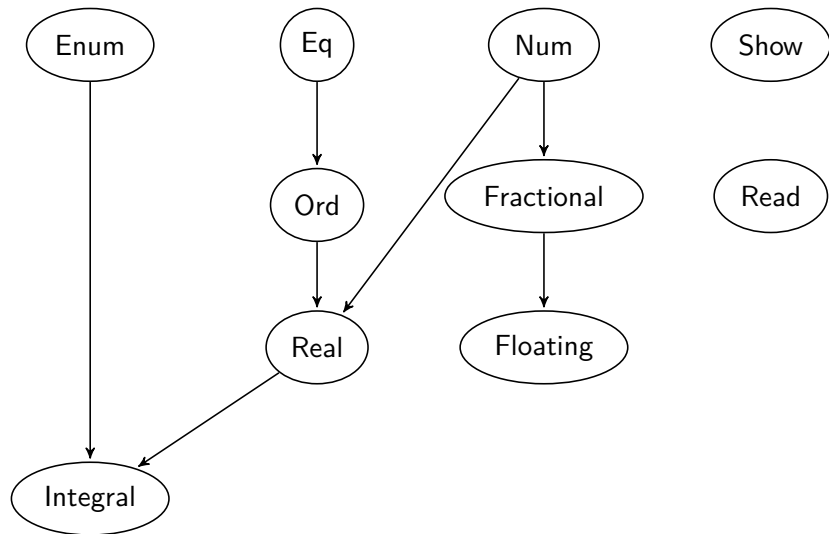
## Implicitní deklarace instance

- V Haskellu lze deklarovat datový typ jako instanci typové třídy (nebo více typových tříd) též implicitně, pomocí klausule `deriving` v definici datového typu.
- Při implicitní deklaraci instance se požadované funkce definují automaticky podle způsobu zápisu hodnot definovaného typu
- Funkce `(==)` se při implicitní deklaraci instance realizuje jako syntaktická rovnost.

## Příklad

- ```
data Nat = Zero | Succ Nat
  deriving (Eq, Show)
```

Hierarchie základních typových tříd



Definice typové třídy

- `class Boolable a where getBool :: a -> Bool`

Instanciace

- `instance Boolable Bool where
 getBool x = x`
- `instance Boolable Int where
 getBool 0 = False
 getBool _ = True`

Použití

- `myIf :: Boolable a => a -> b -> b -> b
 myIf x t f = if getBool x then t else f`
- `myIf (3-3) "Pravda" "Nepravda" ~\~>* "Nepravda"`
- `myIf (3-4) "Pravda" "Nepravda" ~\~>* "Pravda"`

Časová složitost

Podstata

- Časová složitost funkce popisuje **délku výpočtu** v nejhorším případě vzhledem k velikosti vstupních parametrů.

Délka výpočtu v nejhorším případě

- Maximální počet redukčních kroků přes všechny možné výpočty aplikace programu na vstupní parametry stejné velikosti.

Podstata

- Časová složitost funkce popisuje **délku výpočtu** v nejhorším případě vzhledem k velikosti vstupních parametrů.

Délka výpočtu v nejhorším případě

- Maximální počet redukčních kroků přes všechny možné výpočty aplikace programu na vstupní parametry stejné velikosti.

Času je málo!



Reverze seznamu funkce `reverse'`

- `reverse' :: [a] -> [a]`
`reverse' [] = []`
`reverse' (x:s) = reverse' s ++ [x]`
- `(++) :: [a] -> [a] -> [a]`
`[] ++ t = t`
`(x:s) ++ t = x : (s++t)`

Reverze seznamu funkce `reverse`

- `reverse :: [a] -> [a]`
`reverse = rev []`
 where `rev s [] = s`
 `rev s (x:t) = rev (x:s) t`

Reverse seznamu funkcí `reverse'`

`reverse' :: [a] -> [a]`

`reverse' [] = []`

`reverse' (x:s) = reverse' s ++ [x]`

`(++) :: [a] -> [a] -> [a]`

`[] ++ t = t`

`(x:s) ++ t = x : (s++t)`

```
reverse' [1,2,3]
~> reverse' [2,3] ++ [1]
~> (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
~> ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> ([3] ++ [2]) ++ [1]
~> (3 : ([] ++ [2])) ++ [1]
~> (3 : [2]) ++ [1]
~> 3 : ([2] ++ [1])
~> 3 : (2 : ([] ++ [1]))
~> 3 : (2 : [1]) ≡ [3,2,1]
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- **$n+1$**

```
reverse' [1,2,3]
~> reverse' [2,3] ++ [1]
~> (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
~> ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]

~> ([3] ++ [2]) ++ [1]

~> (3 : ([2] ++ [1])) ++ [1]
~> (3 : [2]) ++ [1]

~> 3 : ([2] ++ [1])
~> 3 : (2 : ([1] ++ []))
~> 3 : (2 : [1])
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $n+1 + 1$

```
reverse' [1,2,3]
↪ reverse' [2,3] ++ [1]
↪ (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
↪ ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
↪ (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
↪ ((3) ++ [2]) ++ [1]
↪ (3 : ([] ++ [2])) ++ [1]
↪ (3 : [2]) ++ [1]
↪ 3 : ([2] ++ [1])
↪ 3 : (2 : ([] ++ [1]))
↪ 3 : (2 : [1])
```


- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $n+1 + 1 + 2$

```
reverse' [1,2,3]
~> reverse' [2,3] ++ [1]
~> (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
~> ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]

~> ([3] ++ [2]) ++ [1]

~> (3 : ([] ++ [2])) ++ [1]
~> (3 : [2]) ++ [1]

~> 3 : ([2] ++ [1])
~> 3 : (2 : ([] ++ [1]))
~> 3 : (2 : [1])
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $n+1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$

```
reverse' [1,2,3]
~> reverse' [2,3] ++ [1]
~> (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
~> ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]

~> ([3] ++ [2]) ++ [1]

~> (3 : ([] ++ [2])) ++ [1]
~> (3 : [2]) ++ [1]

~> 3 : ([2] ++ [1])
~> 3 : (2 : ([] ++ [1]))
~> 3 : (2 : [1])
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $n+1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$

```
reverse' [1,2,3]
~> reverse' [2,3] ++ [1]
~> (reverse' [3] ++ [2]) ++ [1]
~> ((reverse' [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
~> (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]

~> ([3] ++ [2]) ++ [1]

~> (3 : ([2] ++ [1])) ++ [1]
~> (3 : [2]) ++ [1]

~> 3 : ([2] ++ [1])
~> 3 : (2 : ([1] ++ []))
~> 3 : (2 : [1])
```

```
reverse :: [a] -> [a]
```

```
reverse = rev []
```

```
  where rev s [] = s
```

```
        rev s (x:t) = rev (x:s) t
```

```
reverse [1,2,3]
```

```
  ~> rev [] [1,2,3]
```

```
  ~> rev [1] [2,3]
```

```
  ~> rev [2,1] [3]
```

```
  ~> rev [3,2,1] []
```

```
  ~> [3,2,1]
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- **1**

```
reverse [1,2,3]
~> rev [] [1,2,3]
~> rev [1] [2,3]
~> rev [2,1] [3]
~> rev [3,2,1] []
~> [3,2,1]
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $1 + n$

```
reverse [1,2,3]
~> rev [] [1,2,3]
~> rev [1] [2,3]
~> rev [2,1] [3]
~> rev [3,2,1] []
~> [3,2,1]
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $1 + n + 1$

```
reverse [1,2,3]
~> rev [] [1,2,3]
~> rev [1] [2,3]
~> rev [2,1] [3]
~> rev [3,2,1] []
~> [3,2,1]
```

- Délka výpočtu funkce při aplikaci na seznam délky n .
- $1 + n + 1$

```
reverse [1,2,3]
~> rev [] [1,2,3]
~> rev [1] [2,3]
~> rev [2,1] [3]
~> rev [3,2,1] []
~> [3,2,1]
```


Pozorování

- Při určování časové složitosti algoritmů je nepraktické a často i obtížné určovat tuto složitost přesně.
- Funkce vyjadřující délku výpočtu vzhledem k velikosti parametru klasifikujeme podle **asymptotického chování**.

Asymptotický růst funkcí

- Při zápisu funkční hodnoty v proměnné n **rozhoduje nejrychleji rostoucí člen**. U něj navíc zanedbáváme kladnou multiplikační konstantu.
- Podle toho hovoříme o funkcích lineárních, kvadratických, exponenciálních apod.

Přehled asymptotických funkcí

t(n)	růst funkce t
1, 20, 729, 2^{64}	konstantní
$2 \log n + 5$, $3 \log_2 n + \log_2(\log_2 n)$	logaritmický
n , $2n + 1$, $n + \sqrt{n}$ $n \log n$, $3n \log n + 6n + 9$ n^2 , $3n^2 + 4n - 1$, $n^2 + 10 \log n$ n^3 , $n^3 + 3n^2$	<i>lineární</i> <i>n log n</i> polynomiální <i>kvadratický</i> <i>kubický</i>
2^n $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 3^n	exponenciální

reverse'

- Počet redukčních kroků výrazu reverse' $[x_1, \dots, x_n]$ na každém seznamu délky n je

$$n + 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

Složitost funkce reverse' je **kvadratická** vzhledem k délce obráceného seznamu.

reverse

- Počet redukčních kroků výrazu reverse $[x_1, \dots, x_n]$ na každém seznamu délky n je

$$1 + n + 1 = n + 2$$

Složitost funkce reverse je **lineární** vzhledem k délce obráceného seznamu.

Časová složitost algoritmu

- Posuzuje konkrétní algoritmus.
- Nevypovídá a jiných algoritmech pro řešení téhož problému.

Časová složitost problému

- Daný problém je možné řešit různými algoritmy.
- Složitost problému vypovídá a časové složitosti nejlepšího možného algoritmu pro řešení problému.
- Určovat složitost problému je výrazně obtížnější, než určování složitosti algoritmu.
- Bez znalosti složitosti problému nelze určit, zda daný algoritmus pro řešení problému je optimální.

Pozor

- Časová složitost popisuje délku výpočtu **v nejhorším případě** pro danou velikost argumentu.

Příklad

- Vyšetřujeme časovou složitost funkce `ins` vzhledem k jejímu druhému parametru.
- Funkce `ins` zařazuje prvek do seřazeného seznamu.

```
ins :: Int -> [Int] -> [Int]
```

```
ins x [] = [x]
```

```
ins x (y:t) = if x <= y then x : y : t else y : ins x t
```

Různé délky výpočtu

- Počet kroků při volání `ins x [x1, ..., xn]` je různý.

- Nejkratší výpočet má délku 3:

`ins 1 [2,4,6,8]` \rightsquigarrow^3 `[1,2,4,6,8]`

- Nejdelší výpočet má délku $3n + 1$:

`ins 9 [2,4,6,8]` \rightsquigarrow^{3*4+1} `[2,4,6,8,9]`

Časová složitost

- Časová složitost funkce `ins` je **lineární** vzhledem k velikosti jejího druhého argumentu (tj. vzhledem k délce seznamu).

Pozorování

- Časová složitost závisí nejen na algoritmu (způsobu definování funkce), ale také na redukční strategii.

Příklad

- Uvažme funkci pro uspořádání prvků v seznamu pomocí postupného zařazování.

```
insort :: Ord a => [a] -> [a]
insort = foldr ins []
      where ins x [] = [x]
            ins x (y:t) = if x <= y then x : y : t
                          else y : ins x t
```

- Princip řazení funkcí `insort`

```
insort [x1, x2, ..., xn-1, xn]
  ~> foldr ins [] [x1, x2, ..., xn-1, xn]
  ~>n+1 ins x1 (ins x2 (...(ins xn-1 (ins xn []))...))
```


Striktní vyhodnocování

- Počet redukčních kroků výrazu $\text{minim } [x_1, \dots, x_n]$ je:

$$3 + n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} (3k + 1) + 1 = \frac{3n^2 + n + 10}{2}$$

- Při striktním vyhodnocování má funkce **kvadratickou** časovou složitost.

Líné vyhodnocování

- Počet redukčních kroků výrazu $\text{minim } [x_1, \dots, x_n]$ je:

$$3 + n + 1 + 1 + 3 \cdot (n - 1) + 1 = 4n + 3$$

- Při líném vyhodnocování má funkce **lineární** časovou složitost.

Pozorování

- Není pravda, že časová složitost výpočtu se při líném a striktním vyhodnocování vždy liší.
- Pokud se časová složitost liší, může se lišit víc než o jeden řádek ve zmiňované tabulce asymptotických růstů funkcí.

Příklady

- Konstantní (líně) versus exponenciální (striktně):

$$f\ n = \text{const } n \text{ (fib' } n)$$

- Lineární líně i striktně:

$$\text{length } [a_1, \dots, a_n]$$



Obecný princip

- Vícenásobné nebo nevhodné použití rekurzivního volání v těle rekurzivně definované funkce, může v obecné rovině vést na časově neoptimální algoritmus.
- Opakovanému rekurzivnímu volání pro tutéž hodnotu lze zabránit uchováváním mezivýsledků rekurzivního volání.
- Uchování výsledků se provádí přidáním parametru rekurzivní funkce, tzv. **akumulátoru**.

Pozorování

- Přímé použití rekurzivní funkce má tendenci být čitelnější.

Definice funkcí

```
fib' :: Integer -> Integer
fib' 0 = 0
fib' 1 = 1
fib' n = fib' (n-2) + fib' (n-1)

fib :: Integer -> Integer
fib = f 0 1
  where f a _ 0 = a
        f a b k = f b (a+b) (k-1)
```

Složitost vzhledem k argumentu

- Složitost funkce `fib'` je **exponenciální**.
- Složitost funkce `fib` je **lineární**.

Analyzujte časovou složitost

- funkce `map`, vzhledem k délce seznamu.
- funkce `es` (Eratosthenovo síto) vzhledem k délce seznamu.

Lineární vs. kvadratická

- Vytvořte libovolnou funkci `f1 :: a -> [a]`, která má kvadratickou složitost.
- Vytvořte libovolnou funkci `f2 :: a -> [a]`, která má lineární složitost.
- Použijte obě funkce v kontextu funkce `map` na dlouhých seznamech a pozorujte rozdíl.