

IB107 Vyčísitelnost a složitost

věta o parametrizaci, programovací systémy*,
rekurzivní množiny

Jan Strejček

Fakulta informatiky
Masarykova univerzita

Lemma 7.9

Funkce

$$Sc(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže program } P_x \text{ zastaví pro vstup } y \\ & \text{během } z \text{ kroků} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je totálně vyčíslitelná.

Důkaz: interpreter z důkazu věty o numeraci rozšíříme o počítání instrukcí ■

věta o parametrizaci

- funkci lze definovat **parametrizací**, tj. zafixováním vybraných argumentů jiné funkce

Věta 5.20 (věta o parametrizaci, s_n^m věta (Kleene))

Pro každá $m, n \geq 1$ existuje totálně vyčíslitelná funkce $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $e, y_1, \dots, y_{m+n} \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{s_n^m(e, y_1, \dots, y_m)}^{(n)}(y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) = \varphi_e^{(m+n)}(y_1, \dots, y_{m+n}).$$

důkaz věty o parametrizaci

$$\varphi s_n^{(n)}(e, y_1, \dots, y_m)(y_{m+1}, \dots, y_{m+n}) = \varphi_e^{(m+n)}(y_1, \dots, y_{m+n})$$

Důkaz: funkce $s_n^m(e, y_1, \dots, y_m)$ vrací index programu

begin

$x_{m+n} := x_n;$

\vdots

$x_{m+1} := x_1;$

$x_m := y_m;$

\vdots

$x_1 := y_1;$

P_e

end



Lemma 5.21

Existuje totálně vyčíslitelná funkce $h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i, j, x \in \mathbb{N}$ platí

$$\varphi_{h(i,j)}(x) = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x).$$

Důkaz:

- definujme funkci $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ jako

$$f(i, j, x) = (\varphi_i \circ \varphi_j)(x) = \varphi_i(\varphi_j(x)) = \Phi(i, \Phi(j, x))$$

- f je vyčíslitelná a nechť e je její index
- věta o parametrizaci říká, že TVF s_1^2 splňující $\varphi_{s_1^2(e,i,j)}(x) = \varphi_e(i, j, x) = f(i, j, x)$
- klademe $h(i, j) = s_1^2(e, i, j)$ a tudíž h je totálně vyčíslitelná

Důsledek 5.23 (translační lemma)

Ke každé vyčíslitelné funkci $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ existuje totálně vyčíslitelná funkce $r : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$f(x, y) = \varphi_{r(x)}(y).$$

- nazývá se také **neefektivní** podoba věty o parametrizaci
- lze zobecnit na vyšší počty argumentů

Důkaz:

- nechť e je index f
- věta o parametrizaci říká, že existuje TVF s_1^1 splňující
 $\varphi_{s_1^1(e,x)}(y) = \varphi_e(x, y) = f(x, y)$
- klademe $r(x) = s_1^1(e, x)$ a tudíž r je totálně vyčíslitelná

- necht $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{S}$ je (ne nutně totální) numerace podmnožiny unárních vyčíslitelných funkcí $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$, která splňuje větu o numeraci, tj. existuje vyčíslitelná funkce $\Phi_\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $x, y \in \mathbb{N}$ platí

$$\Phi_\psi(x, y) = \psi_x(y)$$

- dle translačního lemmatu pak existuje totálně vyčíslitelná funkce r splňující

$$\Phi_\psi(x, y) = \varphi_{r(x)}(y) = \psi_x(y)$$

- tedy r převádí numeraci ψ na standardní numeraci φ

- while-programy nejsou jediným modelem algoritmů
- ukážeme nezávislost teorie na volbě formalismu

Definice (programovací systém/jazyk)

Programovací systém (či jazyk) pro $\mathcal{P}^{(j)}$ je dvojice $\mathcal{L}' = (T, \varphi')$, kde T je množina programů (syntaxe) a $\varphi' : T \mapsto \mathcal{P}^{(j)}$ je sémantika přiřazující každému programu j -ární vyčíslitelnou funkci.

- jazyk while-programů:
- můžeme předpokládat, že $T = \mathbb{N}$
- programovací jazyk by měl být
 - **univerzální** – existuje univerzální program
 - **efektivní** – programy lze jednoduše skládat

Definice 6.1 (redukce a ekvivalence numerací)

Numerace ψ množiny M se **redukuje** na numeraci ψ' množiny M' (píšeme $\psi \leq \psi'$), právě když existuje totálně vyčíslitelná funkce $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že pro všechna $i \in \text{dom}(\psi)$ platí

$$\psi_i = \psi'_{r(i)}.$$

Numerace ψ, ψ' jsou **ekvivalentní** (píšeme $\psi \equiv \psi'$), právě když $\psi \leq \psi'$ a $\psi' \leq \psi$.

- jsou-li ψ, ψ' dvě totální numerace množiny \mathcal{P}^U , pak $\psi \leq \psi'$ znamená, že systém (\mathbb{N}, ψ) lze **efektivně přeložit** do systému (\mathbb{N}, ψ')

Věta 6.2

Nechť pro každé $j \geq 1$ jsou $\psi^{(j)}, \psi'^{(j)}$ totální numerace množiny $\mathcal{P}^{(j)}$. Pokud ψ splňuje větu o numeraci a ψ' větu o parametrizaci, pak $\psi^{(j)} \leq \psi'^{(j)}$ pro každé $j \geq 1$.

Důkaz: pro $j = 1$

- $\psi^{(1)}$ má vyčíslitelnou univerzální funkci

$$\Phi_{\psi}(i, x) = \psi_i(x)$$

- translační lemma pro ψ' říká, že existuje totální vyčíslitelná funkce r taková, že

$$\Phi_{\psi}(i, x) = \psi'_{r(i)}(x)$$

- tedy $\psi^{(1)} \leq \psi'^{(1)}$

Věta 6.2 (pokračování)

Nechť pro každé $j \geq 1$ je $\psi^{(j)}$ totální numerací množiny $\mathcal{P}^{(j)}$ a $\varphi^{(j)}$ její standardní numerací. Pak ψ splňuje věty o numeraci a parametrizaci, právě když pro každé $j \geq 1$ platí $\psi^{(j)} \equiv \varphi^{(j)}$.

Důkaz:

⇒ plyne z předchozí věty

⇐ ukážeme, že ψ splňuje větu o numeraci

- pro každé $j \geq 1$ je univerzální funkce $\Phi_\psi : \mathbb{N}^{j+1} \rightarrow \mathbb{N}$ pro ψ definovaná vztahem

$$\Phi_\psi(i, x_1, \dots, x_j) = \psi_i^{(j)}(x_1, \dots, x_j)$$

- z $\psi^{(j)} \leq \varphi^{(j)}$ plyne existence totálně vyčíslitelné funkce $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ splňující $\psi_i^{(j)} = \varphi_{r(i)}^{(j)}$

$$\Phi_\psi(i, x_1, \dots, x_j) =$$

- tedy Φ_ψ je vyčíslitelná

⇐ ukážeme, že ψ splňuje větu o parametrizaci

- necht $m, n \geq 1$
- z $\psi^{(m+n)} \leq \varphi^{(m+n)}$ plyne existence totálně vyčíslitelné funkce $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ splňující $\psi_i^{(m+n)} = \varphi_{r(i)}^{(m+n)}$
- z $\varphi^{(n)} \leq \psi^{(n)}$ plyne existence totálně vyčíslitelné funkce $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ splňující $\varphi_i^{(n)} = \psi_{s(i)}^{(n)}$

$$\psi_i^{(m+n)}(y_1, \dots, y_{m+n}) =$$

- jelikož $g(i, y_1, \dots, y_m) = s(s_n^m(r(i), y_1, \dots, y_m))$ je totálně vyčíslitelná funkce, ψ splňuje větu o parametrizaci



Definice 6.3 (přípustná numerace)

*Totální numerace vyčíslitelných funkcí je **přípustná (efektivní)**, pokud pro ni platí věty o numeraci a parametrizaci.*

věty o numeraci a parametrizaci jsou nezávislé, tedy

- existuje numerace, pro kterou platí věta o numeraci, ale neplatí věta o parametrizaci
- existuje numerace, pro kterou neplatí věta o numeraci, ale platí věta o parametrizaci

Věta 6.5

Nechť ψ je totální numerace všech unárních totálně vyčíslitelných funkcí. Pak univerzální funkce $\Phi_\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ definovaná jako

$$\Phi_\psi(i, x) = \psi_i(x)$$

není vyčíslitelná.

Důkaz: diagonalizací ■

Důsledek 6.6

Neexistuje přípustná totální numerace všech totálních vyčíslitelných funkcí.

Definice 7.1 (rekurzivní množina)

Množina $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je *rekurzivní*, pokud existuje totálně vyčíslitelná funkce $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

$$A = f^{-1}(\{1\}) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid f(x_1, \dots, x_k) = 1\}.$$

Funkce f se nazývá *rozhodovací funkce* pro A .

- rekurzivní množině se také říká *rozhodnutelná* či *řešitelná*
- příklady rekurzivních množin:

Tvrzení

$A \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivní, právě když je její *charakteristická funkce* $\chi_A : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definovaná vztahem

$$\chi_A(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (x_1, \dots, x_k) \in A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

totálně vyčíslitelná.

Důkaz:

Věta 7.4

Jestliže $A \subseteq \mathbb{N}^k$ je konečná množina nebo $\mathbb{N}^k \setminus A$ je konečná, pak A je rekurzivní.

Důkaz:



Lemma 7.5

Nechť $A, B \subseteq \mathbb{N}^k$ jsou rekurzivní množiny. Pak i množiny \bar{A} , $A \cup B$ a $A \cap B$ jsou rekurzivní.

Důkaz:

