Diskrétní matematika – 10. týden
Vytvořující funkce

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2024

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat.

(Formální) mocninné řady

Definice

Buď dána nekonečná posloupnost $a = (a_0, a_1, a_2, \dots)$. Její **vytvořující funkcí** rozumíme (formální) mocninnou řadu tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

Poznámka

O **formální** mocninné řadě hovoříme proto, že se zatím na tuto řadu díváme čistě formálně jako na jiný zápis dané posloupnosti a nezajímáme se o konvergenci. Na druhou stranu to ale znamená, že formální mocninná řada není funkce a nemůžeme do ní dosazovat. To ovšem vzápětí napravíme, když s využitím znalostí z analýzy nekonečných řad přejdeme od formálních mocninnných řad k příslušným funkcím.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1 - x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,...) bez toho, aby se zajímali o konvergenci

Příklad

Posloupnosti samých jedniček odpovídá formální mocninná řada $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Z analýzy víme, že stejně zapsaná mocninná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$ a její součet je roven funkci $1/(1-x)$. Stejně tak obráceně, rozvineme-li tuto funkci do Taylorovy řady v bodě 0, dostaneme zřejmě původní řadu. Takovéto „zakódování“ posloupnosti čísel do funkce a zpět je klíčovým obratem v teorii vytvořujících funkcí.

Jak jsme již zmínili, tento obrat lze ale použít pouze tehdy, pokud víme, že řada alespoň v nějakém okolí 0 konverguje. Často ale „diskrétní“ matematici používají následující „podvod“:

- pomocí formálních mocninných řad odvodí nějaký vztah (formuli, rekurenci,…) bez toho, aby se zajímali o konvergenci
- jinými prostředky (často matematickou indukcí) tento vztah dokážou

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro k-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro k-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);

Vytvořující funkce v praxi využíváme:

- k nalezení **explicitní formule** pro k-tý člen posloupnosti;
- často vytvořující funkce vycházejí z rekurentních vztahů, občas ale díky nim odvodíme rekurentní vztahy nové;
- výpočet průměrů či jiných statistických závislostí (např. průměrná složitost algoritmu);
- důkaz různých identit;
- často je nalezení přesného vztahu příliš obtížné, ale mnohdy stačí vztah přibližný nebo alespoň asymptotické chování.

Součet formální mocninné řady

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ *posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké* $R \in \mathbb{R}$, *že pro všechna* $k \gg 0$ *je* $|a_k| \le R^k$, *pak řada*

$$a(x) = \sum_{k \ge 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. *Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž* $a(x)$.

Součet formální mocninné řady

Následující větu znáte z matematické analýzy z loňského semestru:

Věta

Buď $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ posloupnost reálných čísel. Platí-li pro nějaké $R \in \mathbb{R}$, že pro všechna $k \gg 0$ je $|a_k| \leq R^k$, pak řada

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$$

konverguje pro každé $x \in (-\frac{1}{R}, \frac{1}{R})$. Součet této řady tedy definuje funkci na uvedeném intervalu, tuto funkci označujeme rovněž $a(x)$. Hodnotami funkce $a(x)$ na libovolném okolí 0 je jednoznačně určena původní posloupnost, neboť má $a(x)$ v 0 derivace všech řádů a platí

$$a_k = \frac{a^{(k)}(0)}{k!}.$$

Přehled mocninných řad

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k,$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k},$$

$$e^x = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!},$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k.$$

Poznámka

- Poslední vzorec

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} x^k$$

je tzv. **zobecněná binomická věta**, kde pro $r \in \mathbb{R}$ je binomický koeficient definován vztahem

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

Speciálně klademe $\binom{r}{0} = 1$.

Poznámka

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

To plyne ze vztahu

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k+n-1}{n-1},$$

který odvodíte na cvičení.

Poznámka

- Pro $n \in \mathbb{N}$ z uvedeného vztahu snadno dostaneme

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} x^k.$$

To plyne ze vztahu

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \cdot \binom{k+n-1}{n-1},$$

který odvodíte na cvičení.

- Ještě o něco obecněji můžeme substitucí αx za x obdržet obecnější vzorec, vhodný pro počítání konkrétních příkladů

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k\geq 0} \binom{k+n-1}{n-1} \alpha^k \cdot x^k.$$

Plán přednášky

1. (Formální) mocninné řady
   - Přehled mocninných řad
2. Operace s vytvořujícími funkcemi

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_k + b_k)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_k + b_k)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_k)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_k + b_k)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_k)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^n odpovídá posunutí posloupnosti doprava o n míst a její doplnění nulami.

Některým jednoduchým operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami:

- Sčítání $(a_k + b_k)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_k)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Vynásobení vytvořující funkce $a(x)$ monomem x^n odpovídá posunutí posloupnosti doprava o n míst a její doplnění nulami.
- Pro posunutí posloupnosti doleva o n míst (tj. vynechání prvních n míst posloupnosti) nejprve od $a(x)$ odečteme polynom $b_n(x)$ odpovídají posloupnosti $(a_0, \dots, a_{n-1}, 0, \dots)$ a poté podělíme vytvořující funkci x^n.

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).

Dalšími důležitými operacemi, které se při práci s vytvořujícími funkcemi často objevují, jsou:

- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$, člen s indexem k je $(k+1)a_{k+1}$ (tj. mocninnou řadu derivujeme člen po členu).
- Integrování: funkce $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2, \frac{1}{4}a_3, \dots)$, pro $k \geq 1$ je člen s indexem k roven $\frac{1}{k}a_{k-1}$ (zřejmě je derivací příslušné mocninné řady člen po členu původní funkce $a(x)$).
- Násobení řad: součin $a(x)b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(c_0, c_1, c_2, \dots)$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

tj. členy v součinu až po c_k jsou stejné jako v součinu $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots b_kx^k)$. Posloupnost (c_n) bývá také nazývána *konvolucí* posloupností $(a_n), (b_n)$.

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k), jenom bacha na konkrétní součty typu $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, pro ty je potřeba sčítat pouze přes nezáporná k. Operace s vytvořujícími funkcemi přepíšeme:

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k), jenom bacha na konkrétní součty typu $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, pro ty je potřeba sčítat pouze přes nezáporná k. Operace s vytvořujícími funkcemi přepíšeme:

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k), jenom bacha na konkrétní součty typu $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, pro ty je potřeba sčítat pouze přes nezáporná k. Operace s vytvořujícími funkcemi přepíšeme:

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.

V dalším bude výhodné položit $a_{-1} = 0$, $a_{-2} = 0$, atd. (pak můžeme sčítat přes všechna k), jenom bacha na konkrétní součty typu $\sum_{k \geq 0} x^k = \frac{1}{1-x}$, pro ty je potřeba sčítat pouze přes nezáporná k. Operace s vytvořujícími funkcemi přepíšeme:

- $\sum a_k x^k + \sum b_k x^k = \sum (a_k + b_k) x^k$.
- $\alpha \cdot \sum a_k x^k = \sum (\alpha a_k) x^k$.
- $x^n \cdot \sum a_k x^k = \sum a_{k-n} x^k$.
- $(\sum a_k x^k) \cdot (\sum b_k x^k) = \sum c_k x^k$, kde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \ldots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,$$

Ukažme si důležitý příklad využívající konvoluci posloupností:

Příklad

$\frac{1}{1-x}a(x)$ je v.f.p. $(a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots)$.
Odtud např. dostáváme, že

$$\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x} \quad \text{je v.f.p. harmonických čísel} \quad H_n.$$

Příklad

Protože $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$, dostáváme konvolucí posloupnosti $(1, 1, \ldots)$ se sebou vztahy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n, \quad \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 0}\binom{n+2}{2}x^n,$$

což máme dokázáno z dřívějška jako důsledek zobecněné binomické věty.

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50}).$$

Příklad

V krabici je 30 červených, 40 modrých a 50 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 70 míčků?

Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u x^{70} v součinu

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{30})(1+x+x^2+\cdots+x^{40})(1+x+x^2+\cdots+x^{50}).$$

Tento součin upravíme na tvar
$(1-x)^{-3}(1-x^{31})(1-x^{41})(1-x^{51})$, odkud pomocí zobecněné binomické věty dostaneme

$$\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\right)(1-x^{31}-x^{41}-x^{51}+x^{72}+\dots)$$

a tedy koeficientem u x^{70} je zřejmě
$\binom{70+2}{2}-\binom{70+2-31}{2}-\binom{70+2-41}{2}-\binom{70+2-51}{2}=1061.$

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1+2+\cdots+2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k), je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1+2+\cdots+2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-2x}=2\cdot\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2\cdot 2^k-1)$.

Příklad

Zkusme pomocí vytvořujících funkcí najít explicitní vzoreček pro $1 + 2 + \cdots + 2^k$. Protože je $\frac{1}{1-2x}$ vytvořující funkce posloupnosti (2^k), je vytvořující funkcí pro posloupnost $(1 + 2 + \cdots + 2^k)$ funkce

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-2x} = 2 \cdot \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}.$$

Proto je zpětně tato posloupnost rovna $(2 \cdot 2^k - 1)$.

Rozklad na parciální zlomky!

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

Rozklad na parciální zlomky – připomenutí

Rozklad na parciální zlomky jsme již viděli dříve při integraci racionálních lomených funkcí, přesto připomeneme:

- Předpokládáme, že $P(x)/Q(x)$ je podíl polynomů, kde $\deg P < \deg Q$ (jinak vydělíme se zbytkem) a $P(x), Q(x)$ nemají společné kořeny.
- Polynom $Q(x)$ rozložíme na kořenové činitele.
- Jsou-li všechny kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ jednoduché, pak

$$\frac{P(x)}{Q(X)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{A_\ell}{x - \alpha_\ell}.$$

- Má-li kořen α_i násobnost k_i, pak se příslušný parciální zlomek nahradí součtem parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_{i1}}{(x - \alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x - \alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{ik_i}}{(x - \alpha_i)^{k_i}}.$$

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.

Rozklad na parciální zlomky – pokračování

- V případě dvojice komplexně sdružených kořenů nahrazujeme sčitanec $A/(x-\alpha)$ sčítancem $(Ax+B)/(x^2+px+q)$ včetně příslušných mocnin jmenovatele.
- Neznámé dopočítáme roznásobením a buď porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x nebo dosazením jednotlivých kořenů.
- Výrazy $A/(x-\alpha)^k$ převedeme na výrazy tvaru $B/(1-\beta x)^k$ vydělením čitatele i jmenovatele výrazem $(-\alpha)^k$. Tento výraz již umíme rozvinout do mocninné řady.

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme "otočením" polynomu – provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2:

$$1 - 5\frac{1}{t} + 6\frac{1}{t^2} = (1 - 2\frac{1}{t})(1 - 3\frac{1}{t})$$
$$t^2 - 5t + 6 = (t - 2)(t - 3)$$

Rozklad na parciální zlomky – vychytávka

Protože preferujeme $1 - \beta x$, bude lepší jmenovatel rozložit rovnou na součin takovýchto činitelů, např.

$$1 - 5x + 6x^2 = (1 - 2x)(1 - 3x),$$

který obecně získáme "otočením" polynomu – provedeme substituci $x = \frac{1}{t}$ a vynásobme t^2:

$$\begin{aligned} 1 - 5\frac{1}{t} + 6\frac{1}{t^2} &= (1 - 2\frac{1}{t})(1 - 3\frac{1}{t}) \\ t^2 - 5t + 6 &= (t - 2)(t - 3) \end{aligned}$$

Přitom poslední tvar je již klasický rozklad na kořenové činitele, ve kterém můžeme použít např. známé vzorečky pro kořeny kvadratického polynomu.