Diskrétní matematika – 11. týden
Vytvořující funkce a rekurence

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2024

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, **Concrete Mathematics**, Addison-Wesley, 1994.

Plán přednášky

Obecný postup

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).

Obecný postup

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.

Obecný postup

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.

Obecný postup

Mocninné řady jsou velmi silným nástrojem pro řešení rekurencí (a to nejen lineárních!). Tím je míněno vyjádření členu a_k jako funkci k. Často se s pomocí řad podaří vyřešit na první pohled velmi složité rekurence.

Obvyklý (takřka mechanický) postup pro řešení rekurencí se skládá ze 4 kroků:

1. Zapíšeme jedinou rovnicí závislost a_k na ostatních členech posloupnosti. Tento vztah musí platit pro všechna $k \in \mathbb{N}_0$ (předpokládajíce $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$).
2. Obě strany rovnice vynásobíme x^k a sečteme přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$. Na jedné straně tak dostaneme $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$, což je vytvořující funkce $A(x)$. Pravou stranu vztahu je pak třeba upravit na výraz rovněž obsahující $A(x)$.
3. Zjištěná rovnice se vyřeší vzhledem k $A(x)$.
4. Výsledné $A(x)$ se rozvine do mocninné řady, přičemž koeficient u x^k udává a_k, tj. $a_k = [x^k]A(x)$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2 A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Příklad

Řešte rekurenci

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$
$$a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$$

Řešení

- Krok 1: $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2} + [k = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = 5xA(x) - 6x^2A(x) + x$.
- Krok 3:

$$A(x) = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{1}{1 - 3x} - \frac{1}{1 - 2x}.$$

- Krok 4: $a_k = 3^k - 2^k$.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Našim cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.
Např. $[k = 1], [2|k]$ apod.

Fibonacciho čísla a zlatý řez

Připomeňme, že Fibonacciho čísla jsou dána rekurentním předpisem

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ pro } k \geq 2.$$

Již dříve jste si uváděli všemožné výskyty této posloupnosti v přírodě, v matematice nebo v teoretické informatice (podrobně viz `http://is.muni.cz/th/41281/prif_d/disertace.pdf`). Naším cílem bude (opět) najít formuli pro výpočet n-tého členu posloupnosti.

Poznámka

(Nejen) pro manipulace se sumami používají autoři *Concrete mathematics* velmi vhodné označení [*logický predikát*] – výraz je roven 1 v případě splnění predikátu, jinak 0.

Např. $[k = 1], [2|k]$ apod.

Pro vyjádření koeficientu u x^k ve vytvořující funkci $F(x)$ se pak často používá zápis $[x^k]F(x)$.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro k-tý člen posloupnosti.

Příklad – pokr.

Uvažme vytvořující funkci $F(x)$ Fibonacciho posloupnosti. Při podmínkách $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ je to $F(x) - xF(x) - x^2F(x) = x$, a tedy

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Našim cílem je tedy odvodit vztah pro k-tý člen posloupnosti. Využijeme k tomu rozklad na parciální zlomky a dostaneme

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - \lambda x} + \frac{B}{1 - \mu x},$$

kde λ, μ jsou kořeny $t^2 - t - 1$ a A, B vhodné konstanty odvozené z počátečních podmínek. Odtud už vcelku snadno vyjde $F_k = A \cdot \lambda^k + B \cdot \mu^k$, jak to známe z dřívějška.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$.

Příklad – závěr

S využitím počátečních podmínek dostáváme

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

Jistě je zajímavé, že tento výraz plný iracionálních čísel je vždy celočíselný.
Uvážíme-li navíc, že $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, vidíme, že pro všechna přirozená čísla lze F_k snadno spočítat zaokrouhlením čísla $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k$. Navíc je vidět, že $\lim_{k\to\infty} F_{k+1}/F_k = \lambda \approx 1.618$, což je poměr známý jako zlatý řez – objevuje se již od antiky v architektuře, výtvarném umění i hudbě.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
     + L[0:1]
     + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i-tý největší, je $\frac{1}{k}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i-1$ a $k-i$.

Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*, rozmyslete, proč není optimální):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x<L[0]])
    + L[0:1]
    + qsort([x for x in L[1:] if x>=L[0]])
```

1. Počet porovnání při rozdělení (*divide*): $k-1$.
2. (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek $L[0]$ je i-tý největší, je $\frac{1}{k}$.
3. Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*: $i-1$ a $k-i$.

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_k = k - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left(C_{i-1} + C_{k-i} \right).$$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1},\, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1},\ C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$

Analýza Quicksortu pomocí vytvořujících funkcí

Vyřešme nyní rekurenci

$$kC_k = k(k-1) + 2\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}, C_0 = C_1 = 0$$

pomocí uvedeného postupu.

- $\sum_{k\geq 0} kC_k x^k = \sum_{k\geq 0} k(k-1)x^k + 2\sum_{k\geq 0}\sum_{i=1}^{k} C_{i-1}x^k$
- $xC'(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + 2\frac{xC(x)}{1-x}$
- Vyřešíme tuto lineární diferenciální rovnici prvního řádu $((1-x)^2 C(x))' = \frac{2x}{1-x}$, a tedy

$$C(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\left(\ln\frac{1}{1-x} - x\right),$$

odkud konečně $C_k = 2(k+1)(H_{k+1} - 1) - 2k$.

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Ještě jeden příklad

Příklad

Vyřešte rekurenci

$$a_0 = a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$$

Řešení

Tato rekurence je opět jiného typu než dosud studované. Jako vždy neuškodí vypsání prvních několika členů posloupnosti (teď ale ani moc nepomůže, snad jen pro kontrolu správnosti výsledku).[a]

[a] Narozdíl od tvrzení v *Concrete mathematics* je již možné tuto posloupnost nalézt v *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2 A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:
$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n[n \geq 0] + [n = 1]$.
- Krok 2: $A(x) = xA(x) + 2x^2A(x) + \frac{1}{1+x} + x$.
- Krok 3:
$$A(x) = \frac{1 + x + x^2}{(1 - 2x)(1 + x)^2}.$$
- Krok 4: $a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$.

Plán přednášky

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*].

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 .$$

Binární stromy a Catalanova čísla

S využitím vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom*, *pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Snadno nahlédneme, že pro $n \geq 1$ vyhovuje b_n rekurentní formuli

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1.

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 + [n = 0].$$

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0 + [n = 0].$$

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak dostaneme:

$$B(x) = x \cdot B(x) \cdot B(x) + 1.$$

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$.
Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady.
Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1 - \sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ – tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*. Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (5koruny a 10koruny), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet *monotónních* cest z $[0, 0]$ do $[n, n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet různých triangulací konvexního $(n + 2)$-úhelníku.

Plán přednášky

Cayleyho formule

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.

Cayleyho formule

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Lze snadno spočítat, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 16$. (Např. víme, že v případě stromů na 4 vrcholech musíme z $\binom{6}{3} = 20$ potenciálních grafů s právě 3 hranami odebrat ty možnosti, kde tyto hrany tvoří trojúhelník. Těch je ale právě $\binom{4}{3} = 4$).

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v_0 a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v_0 a hrany s ním incidentní.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v_0 a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v_0 a hrany s ním incidentní.

Kvůli jednoduchosti argumentu budeme rekurzivně vyjadřovat počet tzv. kořenových stromů, tj. stromů s vybraným vrcholem, kterému říkáme kořen. Jejich počet je zjevně $u_n = nt_n$.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v_0 a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v_0 a hrany s ním incidentní.

Kvůli jednoduchosti argumentu budeme rekurzivně vyjadřovat počet tzv. kořenových stromů, tj. stromů s vybraným vrcholem, kterému říkáme kořen. Jejich počet je zjevně $u_n = nt_n$. Uvažme kořenový strom na n vrcholech s kořenem v_0. Odstraněním tohoto vrcholu dostaneme disjunktní sjednocení několika stromů (tzv. les), přičemž každý strom, tj. každá z komponent, má vybraný kořen v_i, konkrétně soused v_0 v původním stromu.

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v_0 a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v_0 a hrany s ním incidentní.
Kvůli jednoduchosti argumentu budeme rekurzivně vyjadřovat počet tzv. kořenových stromů, tj. stromů s vybraným vrcholem, kterému říkáme kořen. Jejich počet je zjevně $u_n = nt_n$. Uvažme kořenový strom na n vrcholech s kořenem v_0. Odstraněním tohoto vrcholu dostaneme disjunktní sjednocení několika stromů (tzv. les), přičemž každý strom, tj. každá z komponent, má vybraný kořen v_i, konkrétně soused v_0 v původním stromu. Naopak, pokud zvolíme vrchol v_0, rozložíme množinu zbylých vrcholů na několik neprázdných disjunktních částí – označme jejich počet m – a na každé vybereme strukturu kořenového stromu s kořenem v_i, dostaneme přidáním hran $v_0v_1, \dots, v_0v_m$ kořenový strom.

Proto pro $n > 1$ platí

$$u_n = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{1+k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{1!k_1!\cdots k_m!} u_{k_1} \cdots u_{k_m}$$

(množinu všech vrcholů obarvíme barvami následovně: jeden vrchol v_0 barvou 0, dále k_i vrcholů barvou i, pro každé i; faktor $\frac{1}{m!}$ zaručí, že nezáleží na pořadí barev $1, \ldots, m$, takže se vskutku jedná o rozklad; v komponentě každé barvy zvolíme kořenový strom).

Proto pro $n > 1$ platí

$$u_n = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{1+k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{1!k_1!\cdots k_m!} u_{k_1} \cdots u_{k_m}$$

(množinu všech vrcholů obarvíme barvami následovně: jeden vrchol v_0 barvou 0, dále k_i vrcholů barvou i, pro každé i; faktor $\frac{1}{m!}$ zaručí, že nezáleží na pořadí barev $1, \ldots, m$, takže se vskutku jedná o rozklad; v komponentě každé barvy zvolíme kořenový strom). Vydělením $n!$ pak rekurenci výrazně zjednodušíme, zejména při substituci $\widehat{u}_n = \frac{u_n}{n!}$:

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

$$\widehat{u}_n = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \widehat{u}_{k_1} \cdots \widehat{u}_{k_m}$$

$$\widehat{u}_n = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1 + \cdots + k_m = n-1} \widehat{u}_{k_1} \cdots \widehat{u}_{k_m}$$

$$\widehat{u}_n = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \widehat{u}_{k_1} \cdots \widehat{u}_{k_m}$$

Je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum \widehat{u}_n \cdot x^n$. Proto je

$$\widehat{U}(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} x \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{u}_n = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \widehat{u}_{k_1} \cdots \widehat{u}_{k_m}$$

Je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum \widehat{u}_n \cdot x^n$. Proto je

$$\widehat{U}(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} x \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = xe^{\widehat{U}(x)}.$$

Věta

Pokud vytvořující funkce $g(x) = \sum_{n\geq 1} g_n x^n$ *splňuje vztah*

$$x = f(g(x)),$$

kde $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, *pak*

$$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n.$$

Důkaz.

Nebudeme se pokoušet o rigorózní důkaz, uvedeme jen, proč by vůbec nějaký vztah mezi koeficienty f a g měl existovat a jak lze pro malá n odvodit: Označíme-li $f(u) = \sum_{k \geq 1} a_k u^k$ a $g(x) = \sum_{l \geq 1} b_l x^l$, pak dosazením do sebe dostaneme vztah

$$\begin{aligned} x = f(g(x)) &= a_1(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots) \\ &\quad + a_2(b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2 + a_3(b_1 x + \dots)^3 + \dots \\ &= a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) x^2 + (a_1 b_3 + a_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) + a_3 b_1^3) x^3 + \dots \end{aligned}$$

ze kterého lze induktivně počítat (první koeficient $a_1 b_1 = 1$, další jsou nulové):

$$b_1 = \frac{1}{a_1},\ b_2 = \frac{-a_2}{a_1^3},\ b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^5}, \dots \qquad \square$$

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$.

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$\begin{aligned}\widehat{u}_n &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/e^u}\right)^n \\ &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\mathrm{e}^{un} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}\end{aligned}$$

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$\widehat{u}_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/e^u}\right)^n$$
$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\mathrm{e}^{un} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

Protože $\widehat{u}_n = \frac{u_n}{n!}$, dostáváme odtud $u_n = n^{n-1}$ a nakonec

$$t_n = \frac{u_n}{n} = n^{n-2}.$$

Další aplikace Lagrangeovy inverzní formule

Vraťme se ještě krátce ke Catalanovým číslům. Chtěli jsme vyřešit rovnici

$$B(x) = xB(x)^2 + 1$$

a výslednou funkci $B(x)$ pak rozvést do mocninné řady.

Další aplikace Lagrangeovy inverzní formule

Vraťme se ještě krátce ke Catalanovým číslům. Chtěli jsme vyřešit rovnici

$$B(x) = xB(x)^2 + 1$$

a výslednou funkci $B(x)$ pak rozvést do mocninné řady. Substitucí $B(x) = C(x) + 1$ rovnici převedeme na $C(x) = x(C(x) + 1)^2$ neboli

$$\frac{C(x)}{(C(x) + 1)^2} = x.$$

Další aplikace Lagrangeovy inverzní formule

Vraťme se ještě krátce ke Catalanovým číslům. Chtěli jsme vyřešit rovnici

$$B(x) = xB(x)^2 + 1$$

a výslednou funkci $B(x)$ pak rozvést do mocninné řady. Substitucí $B(x) = C(x) + 1$ rovnici převedeme na $C(x) = x(C(x) + 1)^2$ neboli

$$\frac{C(x)}{(C(x) + 1)^2} = x.$$

Označíme-li nyní $f(u) = \frac{u}{(u+1)^2}$, je hledaná funkce $C(x)$ k této funkci inverzní a podle Lagrangeovy formule její koeficienty jsou

Další aplikace Lagrangeovy inverzní formule

Vraťme se ještě krátce ke Catalanovým číslům. Chtěli jsme vyřešit rovnici

$$B(x) = xB(x)^2 + 1$$

a výslednou funkci $B(x)$ pak rozvést do mocninné řady. Substitucí $B(x) = C(x) + 1$ rovnici převedeme na $C(x) = x(C(x) + 1)^2$ neboli

$$\frac{C(x)}{(C(x)+1)^2} = x.$$

Označíme-li nyní $f(u) = \frac{u}{(u+1)^2}$, je hledaná funkce $C(x)$ k této funkci inverzní a podle Lagrangeovy formule její koeficienty jsou

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/(u+1)^2}\right)^n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]((u+1)^2)^n \\ &= \frac{1}{n}[u^{n-1}](1+u)^{2n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \end{aligned}$$

což lze vskutku ekvivalentně přepsat jako $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Plán přednášky

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).

Rekurzivně propojené posloupnosti

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}.$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}.$
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x).$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:
  $$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$
- Krok 4: Vidíme, že funkce $C(x)$ je funkce x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž
  $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy
  $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lfloor \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Např. $c_{20} = 413403$.