Diskrétní matematika – 12. týden
Příklady řešení rekurencí

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

podzim 2020

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant
  Matematika drsně a svižně, *e*-text na
  `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`.
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,
  Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1994.

S využitím standardních vytvořujících funkcí určíme formuli pro počet b_n tzv. pěstovaných binárních stromů na n vrcholech, které je pro naše účely možné definovat jako kořen s uspořádanou dvojicí [*levý binární podstrom, pravý binární podstrom*]. Prozkoumáním případů pro malá n vidíme, že

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5.$$

Dělením problému na levý a pravý strom dostaneme pro $n \geq 1$

$$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \cdots + b_{n-1} b_0.$$

Vidíme, že jde vlastně o konvoluci posloupností. Vztah upravíme, aby platil pro všechna $n \in N_0$:

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} b_k b_{n-k-1} + [n = 0].$$

Tím máme hotov krok 1 (obecného postupu z minula).

V kroku 2 vynásobíme obě strany x^n a sečteme. Je-li $B(x)$ odpovídající vytvořující funkce, pak:

$$
\begin{aligned}
B(x) &= \sum_n b_n x^n = \sum_{n,k} b_k b_{n-k-1} x^n + \sum_{n,k} [n=0] x^n = \\
&= \sum_k b_k x^k \left(\sum_n b_{n-k-1} x^{n-k} \right) + 1 = \\
&= \sum_k b_k x^k (xB(x)) + 1 = B(x) \cdot xB(x) + 1.
\end{aligned}
$$

Pravá strana rekurence na prvním řádku je koeficientem u x^{n-1} v součinu $B(x) \cdot B(x)$, tj. členem u x^n v $xB(x)^2$.
Je tedy $xB(x)^2$ vytvořující po tutéž posloupnost jako $B(x)$ s výjimkou prvního členu u x^0.

V kroku 3 řešíme kvadratickou rovnici $B(x) = xB(x)^2 + 1$ pro $B(x)$:

$$B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Znaménko $+$ ale nepřichází v úvahu, protože pak by pro $x \to 0_+$ $B(x)$ měla limitu ∞, zatímco vytvořující funkce pro naši posloupnost musí mít v 0 hodnotu $b_0 = 1$. Naopak pro znaménko $-$ to tak dostaneme.

Pro vytvořující funkci $B(x)$ tedy platí

$$B(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Zbývá už pouze krok 4, tedy rozvinout $B(x)$ do mocninné řady.

Rozvoj získáme pomocí zobecněné binomické věty

$$(1-4x)^{1/2} = \sum_{k\geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k = 1 + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^k$$

a po vydělení $1-\sqrt{1-4x}$ výrazem $2x$ dostaneme

$$\begin{aligned} B(x) = & \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4x)^{k-1} = \\ = & \sum_{n\geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4x)^n}{n+1} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}. \end{aligned}$$

Catalanova čísla

Dokázali jsme, že počet binárních pěstovaných stromů na n vrcholech je roven $b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Tato významná posloupnost se nazývá posloupnost *Catalanových čísel*.

Kromě toho, že Catalanova čísla vyjadřují počet binárních pěstovaných stromů, vystupují rovněž jako:

- počet *monotónních* cest z $[0,0]$ do $[n,n]$ podél stran jednotkových čtverců, které nepřekročí diagonálu
- počet slov délky $2n$ obsahujících n znaků X a Y takových, že žádný prefix slova neobsahuje více Y než X
- podobně takové fronty u pokladny (n lidí má 5korunu a m 10korunu, lístek stojí 5 Kč.), že nezásobená pokladna může vždy vrátit
- počet korektně ozávorkovaných výrazů složených z levých a pravých závorek
- počet různých triangulací konvexního $(n+2)$-úhelníku.

Exponenciální vytvořující funkce

Kromě výše zmíněných vytvořujících funkcí se v praxi rovněž často objevují jejich tzv. *exponenciální* varianty[1].

$$g(x) = \sum_{n \geq 0} g_n \frac{x^n}{n!}.$$

Poznámka

Jméno vychází z toho, že exponenciální funkce e^x je (exponenciální) vytvořující funkcí pro základní posloupnost $(1, 1, 1, 1, \dots)$.
V zápětí v důkazu Cayleyho věty uvidíme, že je použití exponenciálních vytvořujících funkcí výhodné.

---

[1] Používají se i další typy vytvořujících funkcí (např. v teorii čísel se používají Dirichletovy vytvořující funkce, kde roli faktoru x^n hraje n^{-x}), ale těmi se zde zabývat nebudeme.

Opět standardním operacím s posloupnostmi odpovídají jednoduché operace nad mocninnými řadami (coby exponenciálními vytvořujícími funkcemi):

- Sčítání $(a_i + b_i)$ posloupností člen po členu odpovídá součet $a(x) + b(x)$ příslušných vytvořujících funkcí.
- Vynásobení $(\alpha \cdot a_i)$ všech členů posloupnosti stejným skalárem α odpovídá vynásobení $\alpha \cdot a(x)$ příslušné vytvořující funkce.
- Derivování podle x: funkce $a'(x)$ vytvořuje posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. derivování odpovídá posuvu doleva o jedno místo .
- Integrování $\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ vytvořuje posloupnost $(0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, tj. odpovídá posuvu doprava o jedno místo.
- Součin vytvořujících funkcí vytvořuje posloupnost se členy

$$c_n = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} a_i b_j$$

Cayleyho formule

Cayleyho formule je vztah z kombinatorické teorie grafů, který udává, že počet stromů (tj. grafů, v nichž jsou libovolné dva vrcholy spojené právě jednou cestou) na n vrcholech je $\kappa(K_n) = n^{n-2}$. Dokážeme tento výsledek pomocí exponenciálních vytvořujících funkcí.
Označme pro jednoduchost $t_n = \kappa(K_n)$. Lze snadno spočítat, že $t_1 = t_2 = 1, t_3 = 3, t_4 = 16$. (Např. víme, že v případě stromů na 4 vrcholech musíme z $\binom{6}{3} = 20$ potenciálních grafů s právě 3 hranami odebrat ty možnosti, kde tyto hrany tvoří trojúhelník. Těch je ale právě $\binom{4}{3} = 4$).

Rekurentní vztah získáme tak, že zafixujeme jeden vrchol v a možné případy rozdělíme podle počtu komponent v grafu, který dostaneme z koster K_n tak, že odstraníme vrchol v a hrany s ním incidentní.
Pak pro $n > 1$

$$t_n = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{(n-1)!}{k_1! \cdots k_m!} k_1 \cdots k_m \cdot t_{k_1} \cdots t_{k_m}$$

Např. pro $n = 4$ máme $t_4 = 3t_3 + 6t_1 t_2 + t_1^3$.
Ošklivě vypadající rekurenci zjednodušíme substitucí $u_n = nt_n$ (uvědomte si přitom, že u_n udává počet tzv. kořenových stromů).

Dostáváme pro $n > 1$

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{m>0} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_m=n-1} \frac{u_{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{u_{k_m}}{k_m!}$$

a je vidět, že vnitřní sumu dostaneme jako koeficient u x^{n-1} v m-té mocnině řady $\widehat{U}(x) = \sum u_n \frac{x^n}{n!}$. Proto je

$$\frac{u_n}{n!} = [x^{n-1}] \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \widehat{U}(x)^m,$$

a tedy

$$\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}\,.$$

Pro dokončení výpočtu budeme potřebovat tvrzení, které uvedeme bez důkazu.

Definice

Zobecněnou exponenciální mocninnou řadou $\mathcal{E}_t(x)$ nazýváme řadu

$$\mathcal{E}_t(x) = \sum_{k \geq 0} (tk+1)^{k-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Snadno je vidět, že $\mathcal{E}_0 = \mathrm{e}^x$, dále označujeme $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_1(x)$.
Fakt: $\ln \mathcal{E}_t(x) = x \cdot \mathcal{E}_t(x)$, tj. spec. $\mathcal{E}(x) = \mathrm{e}^{x\mathcal{E}(x)}$.
Srovnáním tohoto vztahu s výše uvedeným $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$ vidíme, že $\widehat{U}(x) = x\mathcal{E}(x)$.
Proto

$$t_n = \frac{u_n}{n} = \frac{n!}{n}[x^n]\widehat{U}(x) = (n-1)![x^{n-1}]\mathcal{E}(x) = n^{n-2}.$$

Alternativní závěr výpočtu

Pokud vám přišel závěr výpočtu příliš umělý, zkusme to ještě jednou, s využitím tzv. Lagrangeovy inverzní formule:

Věta

Pokud vytvořující funkce $g(x) = \sum_{n\geq 1} g_n x^n$ *splňuje vztah*

$$x = f(g(x)),$$

kde $f(0) = 0, f'(0) \neq 0$, *pak*

$$g_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{f(u)}\right)^n.$$

Alternativní závěr výpočtu

Řešíme $\widehat{U}(x) = x\,\mathrm{e}^{\widehat{U}(x)}$, tj. $\widehat{U}(x)$ splňuje vztah $x = f(\widehat{U}(x))$, kde $f(u) = \frac{u}{e^u}$. Odtud z Lagrangeovy formule

$$[x^n]\widehat{U}(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\left(\frac{u}{u/e^u}\right)^n$$
$$= \frac{1}{n}[u^{n-1}]\,\mathrm{e}^{un} = \frac{1}{n}\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

Protože $\frac{u_n}{n!} = [x^n]\widehat{U}(x)$, dostáváme odtud

$$t_n = \frac{u_n}{n} = n^{n-2}.$$

Někdy dokážeme snadno vyjádřit hledaný počet jen pomocí více vzájemně provázaných posloupností.

Příklad

Kolika způsoby můžeme pokrýt (nerozlišenými) kostkami domina obdélník $3 \times n$?

Řešení

Snadno zjistíme, že $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0$, dále klademe $c_0 = 1$ (nejde jen o konvenci, má to svou logiku).
Najdeme rekurzívní vztah – diskusí chování „na kraji“ zjistíme, že $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2}$, $r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$, $r_0 = 0, r_1 = 1$, kde r_n je počet pokrytí obdélníku $3 \times n$, ze kterého jsme odstranili levý horní roh.

Řešení (pokr.)

Hodnoty c_n a r_n pro několik malých n jsou:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	0	3	0	11	0	41	0
r_n	0	1	0	4	0	15	0	56

Řešení (pokr.)

- Krok 1: $c_n = 2r_{n-1} + c_{n-2} + [n = 0], \quad r_n = c_{n-1} + r_{n-2}$.
- Krok 2:
  $C(x) = 2xR(x) + x^2C(x) + 1, \quad R(x) = xC(x) + x^2R(x)$.
- Krok 3:

$$C(x) = \frac{1 - x^2}{1 - 4x^2 + x^4}, \qquad R(x) = \frac{x}{1 - 4x^2 + x^4}.$$

- Krok 4: Vidíme, že obě funkce jsou funkcemi x^2, ušetříme si práci tím, že uvážíme funkci $D(z) = 1/(1 - 4z + z^2)$, pak totiž $C(x) = (1 - x^2)D(x^2)$, tj.
  $[x^{2n}]C(x) = [x^{2n}](1 - x^2)D(x^2) = [x^n](1 - x)D(x)$, a tedy
  $c_{2n} = d_n - d_{n-1}$.

Řešení (závěr)

Kořeny $1 - 4x + x^2$ jsou $2 + \sqrt{3}$ a $2 - \sqrt{3}$ a již standardním způsobem obdržíme

$$c_{2n} = \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} + \frac{(2-\sqrt{3})^n}{3+\sqrt{3}}.$$

Podobně jako u Fibonacciho posloupnosti je druhý sčítanec pro velká n zanedbatelný a pro všechna n leží mezi 0 a 1, proto

$$c_{2n} = \left\lfloor \frac{(2+\sqrt{3})^n}{3-\sqrt{3}} \right\rfloor.$$

Např. $c_{20} = 413403$.