

# Diskrétní matematika – 9. týden

## Základy kombinatoriky

Lukáš Vokřínek

Masarykova univerzita  
Fakulta informatiky

podzim 2024

# Obsah přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Vytvořující funkce

## Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant  
**Matematika drsně a svižně**, e-text na  
[www.math.muni.cz/Matematika\\_drsne\\_svizne](http://www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne).

## Doporučené zdroje

- Jan Slovák, Martin Panák, Michal Bulant  
**Matematika drsně a svižně**, e-text na  
[www.math.muni.cz/Matematika\\_drsne\\_svizne](http://www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne).
- Donald E. Knuth, **The Art Of Computer Programming**.
- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik,  
**Concrete Mathematics**, Addison-Wesley, 1994.

# Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Vytvořující funkce

# Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

**Analýza algoritmů:** Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu Quicksort.

# Kombinatorika = umění počítat

Často potřebujeme umět spočítat, kolika možnými způsoby se něco může stát!

Nebývá to jednoduché a naším cílem nyní bude vybudovat základní prostředky pro řešení úloh obdobných těmto:

**Analýza algoritmů:** Např. chceme zjistit očekávaný počet porovnání během algoritmu Quicksort.

**Odvození Cayleyho formule:** Chceme znát počet různých stromů na daných  $n$  vrcholech.

# Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])
```



# Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])
```

- 1 Počet porovnání při rozdělení (*divide*):  $n - 1$ .
- 2 (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek  $L[0]$  je  $k$ -tý největší, je  $\frac{1}{n}$ .
- 3 Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*:  $k - 1$  a  $n - k$ .

# Quicksort – analýza průměrného případu

Ukázka implementace (*divide and conquer*):

```
if L == []: return []
return qsort([x for x in L[1:] if x < L[0]])
        + L[0:1]
        + qsort([x for x in L[1:] if x >= L[0]])
```

- 1 Počet porovnání při rozdělení (*divide*):  $n - 1$ .
- 2 (Předpoklad náhodnosti): Pravděpodobnost toho, že prvek  $L[0]$  je  $k$ -tý největší, je  $\frac{1}{n}$ .
- 3 Velikost tříděných polí ve fázi *conquer*:  $k - 1$  a  $n - k$ .

Pro střední hodnotu počtu porovnání tak dostáváme rekurentní vztah:

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}).$$

# Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

# Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

# Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

# Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

$$(n - 1)C_{n-1} = (n - 1)(n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \quad \text{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

# Zjednodušení rekurence

$$C_n = n - 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} (C_{k-1} + C_{n-k}), \quad C_0 = 0.$$

$$C_n = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{symetrie obou sum}$$

$$nC_n = n(n - 1) + 2 \sum_{k=1}^n C_{k-1} \quad \text{vynásob } n$$

$$(n - 1)C_{n-1} = (n - 1)(n - 2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} C_{k-1} \quad \text{tentýž výraz pro } C_{n-1}$$

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1) \quad \text{odečteno a upraveno}$$

# Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty  $C_n$  dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci  $n$ .



# Vyřešení rekurence

$$nC_n = (n + 1)C_{n-1} + 2(n - 1)$$

Přestože jsme již rekurenci výrazně zjednodušili, takže je možné jednoduše iterativně hodnoty  $C_n$  dopočítat, je často žádoucí tyto hodnoty konkrétně (nebo alespoň přibližně) vyjádřit explicitně jako funkci  $n$ .

Nejprve si pomůžeme drobným trikem, kdy vydělíme obě strany výrazem  $n(n + 1)$  :

$$\frac{C_n}{n + 1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2(n - 1)}{n(n + 1)}$$

Nyní tento vztah „rozbalíme“ (*telescope*, příp. si pomůžeme substitucí  $B_n = C_n/n + 1$ ):

$$\frac{C_n}{n + 1} = \frac{2(n - 1)}{n(n + 1)} + \frac{2(n - 2)}{(n - 1)n} + \dots + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{C_1}{2}$$

# Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

# Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1}$$

# Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1} \text{ a dostaneme}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \left( H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1} \right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

( $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  je součet prvních  $n$  členů harmonické řady).

# Vyřešení rekurence

Odkud

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}.$$

Výraz sečteme např. pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k+2} - \frac{1}{k+1} \text{ a dostaneme}$$

$$\frac{C_n}{n+1} = 2 \left( H_{n+1} - 2 + \frac{1}{n+1} \right),$$

odkud

$$C_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4(n+1) + 2$$

( $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  je součet prvních  $n$  členů harmonické řady).

Přitom je možné odhadnout  $H_n \sim \int_1^n \frac{dx}{x} + \gamma$ , odkud

$$C_n \sim 2(n+1)(\ln(n+1) + \gamma - 2) + 2.$$

# Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Vytvořující funkce

# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině  $S$  s  $n$  prvky je právě  $n!$  různých pořadí.



# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině  $S$  s  $n$  prvky je právě  $n!$  různých pořadí.

Počet **kombinací  $k$ -tého stupně** z  $n$  prvků je ( $k \leq n$ )

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině  $S$  s  $n$  prvky je právě  $n!$  různých pořadí.

Počet **kombinací  $k$ -tého stupně** z  $n$  prvků je ( $k \leq n$ )

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

$$v(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

pro všechny  $0 \leq k \leq n$  (a nula jinak).

# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině  $S$  s  $n$  prvky je právě  $n!$  různých pořadí. Počet **kombinací  $k$ -tého stupně** z  $n$  prvků je ( $k \leq n$ )

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

$$v(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

pro všechny  $0 \leq k \leq n$  (a nula jinak).

## Příklad

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

# Pravidlo součtu a součinu

Vylučující se možnosti sčítáme, vzájemně nezávislé a současně se vyskytující případy se násobí.

Na dané konečné množině  $S$  s  $n$  prvky je právě  $n!$  různých pořadí.

Počet **kombinací  $k$ -tého stupně** z  $n$  prvků je ( $k \leq n$ )

$$c(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Pro počet variací platí

$$v(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

pro všechny  $0 \leq k \leq n$  (a nula jinak).

## Příklad

Určete, kolika způsoby lze z 15 poslanců vybrat čtyřčlennou komisi, není-li možné, aby jistí 2 poslanci pracovali spolu.

Výsledek je  $\binom{15}{4} - \binom{13}{2} = 1287$ .

# Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi  $n$  danými prvky  $p_1$  prvků prvního druhu,  $p_2$  prvků druhého druhu,  $\dots$ ,  $p_k$  prvků  $k$ -tého druhu,  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$ , potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním,  $P(p_1, \dots, p_k)$ , platí

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

# Kombinace a variace s opakováním

Nechť je mezi  $n$  danými prvky  $p_1$  prvků prvního druhu,  $p_2$  prvků druhého druhu,  $\dots$ ,  $p_k$  prvků  $k$ -tého druhu,  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$ , potom pro počet pořadí těchto prvků s opakováním,  $P(p_1, \dots, p_k)$ , platí

$$P(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Pro **variace  $k$ -tého stupně s opakováním** z  $n$  prvků platí

$$V(n, k) = n^k.$$

Pro **kombinace s opakováním**,  $C(n, k)$ , platí

### Věta

*Počet kombinací s opakováním  $k$ -té třídy z  $n$  prvků je pro všechna  $0 \leq k$  a  $0 < n$*

$$C(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}.$$

# Princip inkluze a exkluze

Uvažujme obecnou konečnou množinu  $M$  a její podmnožiny  $A_1, \dots, A_k$ . Budeme psát  $|M|$  pro počet prvků množiny  $M$ , tj. pro **mohutnost** množiny  $M$ .

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^k A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^k \left( (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| \right).$$



# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$

Geometrická řada  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada 
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada 
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta 
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada 
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada 
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta 
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada 
$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

# Příklady kombinatorických rovností

Dokážeme (pokud možno kombinatorickou úvahou):

Aritmetická řada 
$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Geometrická řada 
$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Binomická věta 
$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Horní binomická řada 
$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Vandermondova konvoluce 
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

# Odkazovací strategie

Ve vězení je 100 vězňů s čísly jedna až sto. V uzavřené místnosti je 100 krabiček s čísly jedna až sto a v každé z nich náhodně rozdělené papírky s čísly také 1 až sto. Do místnosti budou po jednom postupně vcházet vězni a každý smí otevřít 50 krabic, vězni přitom spolu nekomunikují. Jestliže každý z nich najde svoje číslo, všechny pustí, v opačném případě všechny popraví. Doporučte nějakou rozumnou strategii pro vězně ...

# Plán přednášky

- 1 Motivace
- 2 Elementární kombinatorické metody
- 3 Vytvořující funkce**



Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

### Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

### Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla  $i$ ,  $j$  a  $k$  taková, že  $i + j + k = 22$  a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)

$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky (Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient u  $x^{22}$  ve výsledném polynomu.

Motto: *spojité a diskrétní modely se vzájemně potřebují a doplňují.*

### Příklad

Máme v peněžence 4 korunové mince, 5 dvoukorunových a 3 pětikorunové. Z automatu, který nevrací, chceme minerálku za 22 Kč. Kolika způsoby to umíme, aniž bychom ztratili přeplatek?

Hledáme zjevně čísla  $i$ ,  $j$  a  $k$  taková, že  $i + j + k = 22$  a zároveň

$$i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, j \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, k \in \{0, 5, 10, 15\}.$$

Uvažme součin polynomů (třeba nad reálnými čísly)


$$(x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15}).$$

Mělo by být zřejmé, že hledaný počet řešení je díky

(Cauchyovskému) způsobu násobení polynomů právě koeficient

u  $x^{22}$  ve výsledném polynomu. Skutečně tak dostáváme **čtyři**

**možnosti**  $3 \times 5 + 3 \times 2 + 1 \times 1$ ,  $3 \times 5 + 2 \times 2 + 3 \times 1$ ,

$2 \times 5 + 5 \times 2 + 2 \times 1$  a  $2 \times 5 + 4 \times 2 + 4 \times 1$ . 

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla  $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$  a  $a_{50}$  taková, že  $a_i$  je násobkem  $i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  a zároveň  $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$ .



Předchozí příklad asi vypadal spíš jako složitý zápis jednoduchých „backtrackingových úvah“. Následující příklad ukazuje, že tento postup lze ale s výhodou zobecnit.

Nechť  $I, J$  jsou konečné množiny nezáporných celých čísel. Potom je pro dané  $r \in \mathbb{N}$  počet řešení  $(i, j)$  rovnice  $i + j = r$  splňujících  $i \in I, j \in J$  roven koeficientu u  $x^r$  v polynomu  $(\sum_{i \in I} x^i)(\sum_{j \in J} x^j)$ .

### Příklad

Kolika způsoby můžeme pomocí mincí (1, 2, 5, 10, 20 a 50 Kč) zaplatit platbu 100 Kč?

Hledáme přirozená čísla  $a_1, a_2, a_5, a_{10}, a_{20}$  a  $a_{50}$  taková, že  $a_i$  je násobkem  $i$  pro všechna  $i \in \{1, 2, 5, 10, 20, 50\}$  a zároveň  $a_1 + a_2 + a_5 + a_{10} + a_{20} + a_{50} = 100$ . Podobně jako výše je vidět, že požadovaný počet lze získat jako koeficient u  $x^{100}$  v

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^5 + x^{10} + \dots) \\ (1 + x^{10} + x^{20} + \dots)(1 + x^{20} + x^{40} + \dots)(1 + x^{50} + x^{100} + \dots)$$

Drobný rozdíl je v tom, že se nyní nejedná o polynom, ale nekonečnou řadu; přitom ale není problém všechny výpočty končit u  $x^{100}$ , čímž se opět dostaneme k polynomům (nicméně nekonečná geometrická řada má jednodušší vzorec pro součet!).

Drobný rozdíl je v tom, že se nyní nejedná o polynom, ale nekonečnou řadu; přitom ale není problém všechny výpočty končit u  $x^{100}$ , čímž se opět dostaneme k polynomům (nicméně nekonečná geometrická řada má jednodušší vzorec pro součet!).

### Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

Drobný rozdíl je v tom, že se nyní nejedná o polynom, ale nekonečnou řadu; přitom ale není problém všechny výpočty končit u  $x^{100}$ , čímž se opět dostaneme k polynomům (nicméně nekonečná geometrická řada má jednodušší vzorec pro součet!).

### Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

### Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u  $x^7$  v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^5)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^{15}).$$

Drobný rozdíl je v tom, že se nyní nejedná o polynom, ale nekonečnou řadu; přitom ale není problém všechny výpočty končit u  $x^{100}$ , čímž se opět dostaneme k polynomům (nicméně nekonečná geometrická řada má jednodušší vzorec pro součet!).

### Příklad

V krabici je 5 červených, 10 modrých a 15 bílých míčků, míčky stejné barvy přitom nelze rozeznat. Kolika způsoby je možné vybrat soubor 7 míčků k vyzkoušení? A o kolik míň to bude, když chceme aspoň 1 červený, aspoň 2 modré a aspoň 3 bílé?

### Řešení

Hledaný počet je roven koeficientu u  $x^7$  v součinu

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^5)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots + x^{15}).$$

Když máme předepsaný nějaký počet jako nejmenší možný, prostě začneme až od příslušných mocnin.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějších. Využijeme přitom **binomickou větu**.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějších. Využijeme přitom **binomickou větu**.

### Věta (binomická)

*Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Na pravou stranu se můžeme dívat jako na součin  $n$  polynomů, levá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Využitím operací s polynomy lze velmi snadno odvodit také některé kombinatorické vztahy, které známe již z dřívějších. Využijeme přitom **binomickou větu**.

### Věta (binomická)

*Pro  $n \in \mathbb{N}$  a  $r \in \mathbb{R}$  platí*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Na pravou stranu se můžeme dívat jako na součin  $n$  polynomů, levá je zápisem polynomu vzniklého jejich roznásobením.

Dosazením čísel  $x = 1$ , resp.  $x = -1$  dostáváme známé vzorce:

### Důsledek

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ,
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .



Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitýma očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

### Důsledek

*Platí*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Podíváme se teď na obě strany v binomické větě „spojitými očima“ a s využitím vlastností derivací odvodíme další vztah mezi kombinačními čísly.

### Důsledek

*Platí*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

### Důkaz.

Na obě strany binomické věty se podíváme jako na polynomiální funkce. Derivací levé strany dostaneme  $n(1+x)^{n-1}$ , derivací pravé strany (člen po členu) pak  $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$ . Dosazením  $x = 1$  dostaneme tvrzení. □