Kapitola 9

Kombinatorika, pravděpodobnost

9.1 Opakování z přednášky

Připomeneme si *princip inkluze a exkluze.* Označme $\#A$ počet prvků konečné množiny A. Mějme systém konečných množin $\{A_i\}_{i=1}^n$. Pak platí

$$\#\bigcup_i A_i = \sum_i \#A_i - \sum_{i\neq j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{i\neq j\neq k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots +$$
$$+ (-1)^{n-2} \sum_i \# \bigcap_{j\neq i} A_j + (-1)^{n-1} \# \bigcap_i A_i.$$

Připomeneme si definici a výpočet kombinačního čísla.

$$\binom{n}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}}$$
$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}$$

Zavedeme si *klesající faktoriál z n podle k* vztahem

$$[n]_k := n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) \tag{9.1}$$

pro $k \in \mathbb{N}$. Pro $k = 0$ speciálne klademe $[n]_0 = 1$ jako prázdný součin. Je vidět, že pak pro klasický faktoriál máme vztah $n! = [n]_n$. Vidíme, že ve vztahu (9.1) nepotřebujeme, aby n bylo přirozené číslo. Lze tedy vzorcem (9.1) definovat klesající faktoriál podle k z libovolného *reálného* (nebo i komplexního) čísla. (Podobně bychom si mohli zavést rostoucí faktoriál z n podle k jako

$$[n]^k := n\cdot(n+1)\cdot\dots\cdot(n+k-1),$$

což ale zde nebudeme potřebovat.) S touto symbolikou můžeme psát kombinační číslo jako

$$\binom{n}{k} = \frac{[n]_k}{k!}.$$

Při užití tohoto zápisu opět nepotřebujeme, aby n bylo přirozené číslo, můžeme proto definovat pro libovolné *reálné* (komplexní) číslo r (zobecněné) kombinační číslo

$$\binom{r}{k} := \frac{[r]_k}{k!}, \tag{9.2}$$

čteno r nad k. Dále je možno faktoriál zobecnit pomocí *Gamma funkce.* Ta je definována vztahem

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\, t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Platí, že

$$\Gamma(n+1) = n!$$

pro $n \in \mathbb{N}_0$. Pak je možné definovat zobecněné kombinační číslo

$$\binom{z}{w} := \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(w+1)\,\Gamma(z-w+1)}$$

pro libovolná z, $w \in \mathbb{C}$, pro něž je výraz napravo definován.

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Definujeme si *dvojitý faktoriál*[1] z n rekurentním vztahem

$$n!! = \begin{cases} 1 & n \in 0, 1, \\ n \cdot (n-2) & n \geq 2. \end{cases}$$

Máme vyjádření

$$n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n & n \text{ liché}, \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n & n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Odtud máme

$$n! = n!! \cdot (n-1)!! \tag{9.3}$$

jelikož n a $n-1$ jsou jedno sudé a jedno liché, následně si v součinu seskupíme zvlášť sudé a liché činitele. Můžeme počítat

$$(2\,k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2\,k) = 2^k\, k!,$$

tedy pro n sudé máme vyjádření $n!! = 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)!$. Dále můžeme díky (9.3) počítat

$$(2\,k+1)!! = \frac{(2\,k+1)!}{(2\,k)!!} = \frac{(2\,k+1)!}{2^k\, k!}. \tag{9.4}$$

Celkem máme tedy vyjádření dvojitého faktoriálu

$$n!! = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)! & n \text{ sudé}, \\ \frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} & n \text{ liché}. \end{cases}$$

[1] Také označovaný jako *semifaktoriál* z n.

Mějme posloupnost přirozených (celých, reálných, komplexních, ...) čísel $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Její vytvořující funkcí rozumíme (formální) mocninnou řadu

$$\mathrm{V}\, a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Konverguje-li tato řada absolutně na nějakém okolí 0, pak zadává na okolí 0 (hladkou) funkci.[2] Dostáváme tak korespondenci mezi (vhodnými) posloupnostmi čísel a analytickými funkcemi definovanými na nějakém okolí nuly. Danou funkci značíme $\mathrm{V}\, a$, nebo $\mathrm{V}(a)(x)$. Operátor vytvořující funkce je *lineární*, tj. máme-li číselné posloupnosti $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ a (reálná, komplexní) čísla α a β, pak

$$\mathrm{V}(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\ \mathrm{V}\, a + \beta\ \mathrm{V}\, b.$$

Vynásobení vytvořující funkce x^k odpovídá posunutí posloupnosti o k míst doprava a doplnění nulami na začátek. Naopak vynechání prvních k členů posloupnosti a posunutí zbylých členů doleva odpovídá odečtení polynomu $a_0 + \cdots + a_{k-1}\, x^{k-1}$ od vytvořující funkce a její následné podělení x^k. Jak již bylo naznačeno výše, vytvořující funkci je možno derivovat jako mocninou řadu člen po členu, derivace vytvořující funkce $\mathrm{V}(a)'$ je pak vytvořující funkcí posloupnosti $\{(n+1)\, a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$. Rovněž je možno vytvořující funkci integrovat jako mocninnou řadu člen po členu, pak $\int_0^x \mathrm{V}(a)(t)\, \mathrm{d}t$ je vytvořující funkcí posloupnosti A, kde $A_0 = 0$ a $A_n = \frac{1}{n}\, a_n$ pro $n \geq 1$.

Pro příklad je vytvořující funkce posloupnosti samých jedniček geometrická řada

$$V(\{1\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Mějme posloupnosti $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $b = \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$. Jejich *konvolucí* rozumíme posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde

$$c_n := \sum_{i+j=n} a_i\, b_j$$

a na pravé straně suma probíhá přes všechny dvojice i a j dávající v součtu n. Pak posloupnost $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ značíme $a * b$. Protože součet mocninné řady konvoluce dvou posloupností odpovídá (Cauchyovu) součinu mocninných řad, máme vztah

$$\mathrm{V}(a * b) = \mathrm{V}(a) \cdot \mathrm{V}(b).$$

Konvoluce je možné použít k počítání různých posloupností. Mějme například posloupnost $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Nechť $s = \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů ,tj. $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Pak je vytvořující funkce posloupnosti s rovna funkci

$$\mathrm{V}(s)(x) = \frac{\mathrm{V}(a)(x)}{1-x}. \tag{9.5}$$

[2]Řada má pak v nule všechny derivace – mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, tyto vzniklé mocninné řady jsou také absolutně konvergentní. Bereme-li mocninnou řadu jako komplexní funkci, jedná se o funkci holomorfní v nule.

To je dáno tím, že posloupnost částečných součtů posloupnosti a je vlastně jen konvolucí posloupnosti a s posloupností samých jedniček. (Samozřejmě je nutné ohlídat, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} s_n\, x^n$ konverguje na nějakém okolí 0).

Dále například autokonvolucí k posloupností samých jedniček obdržíme posloupnost $\left\{\binom{n+k-1}{k-1}\right\}_{n=0}^{\infty}$, tudíž máme vztah

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n. \tag{9.6}$$

9.2 Příklady řešené na cvičení

Příklad 9.1. V šatně si 4 návštěvníci odložili své kabáty a klobouky. Nešťastnou náhodou klobouky spadly na zem. Šatnářka chce klobouky opět pověsit, ale protože si nepamatuje, který patří komu, pověsí je k jednotlivým kabátům zcela náhodně. Kolika způsoby může klobouky pověsit tak, aby alespoň jeden návštěvník dostal svůj klobouk? Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden návštěvník dostane svůj klobouk?

Řešení. Můžeme si kabáty i klobouky označit čísly 1 až 4. Pak vlastně hledáme všechny permutace čtyřprvkové množiny s alespoň jedním pevným bodem, a to pomocí principu inkluze a exkluze. Máme $\binom{4}{1}$ možností na výběr jednoho pevného bodu, pro každý z nich 3! permutací zbylých prvků. Některé permutace jsme započetli dvakrát, musíme proto odečíst $\binom{4}{2} \cdot 2!$ permutací s alespoň dvěma pevnými body. Permutace s alespoň 3 pevnými body – tedy identitu – jsme přičetli čtyřikrát a pak odečetli šestkrát, musíme ji tedy zpět přičíst třikrát. Celkem máme tedy

$$\binom{4}{1} \cdot 3! - \binom{4}{2} \cdot 2! + 3 \cdot 1! = 4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 3 = 24 - 12 + 3 = 15$$

možností. Pravděpodobnost, že alespoň jeden návštěvník pak dostane svůj klobouk je

$$\frac{15}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8} = 62,5\,\%. \qquad \triangle$$

Příklad 9.2. Na kolik oblastí může maximálně rozdělit rovinu n kružnic?

Řešení. Zřejmě 0 kružnic rozdělí rovinu na 1 oblast. 1 kružnice rovinu rozdělí na 2 oblasti – vnitřek a vnějšek. Pro dvě kružnice máme 4 oblasti – pokud kružnice nakreslíme tak, aby se protínaly ve dvou bodech, máme vnějšek, pak dvě oblasti ve vnitřku pouze jedné kružnice a oblast průniku obou vnitřků. U tří kružnic podobně dostaneme 3 oblasti vnitřků pouze jedné kružnice, 3 průniky vnitřků právě dvou kružnic, 1 průnik vnitřků všech tří kružnic a jeden vnějšek, tedy celkem 8 oblastí. Pro 4 kružnice je počítání malinko složitější – máme 4 vnitřky pouze jedné z kružnic, 4 průniky vnitřků právě dvou, 4 vnitřky průniků právě tří, jeden průnik vnitřků všech čtyř a vnějšek, celkem tedy dělí 4 kružnice rovinu až na 14 oblastí.

Určeme nyní obecný případ. Označme a_n maximální počet oblastí, na který dělí rovinu n kružnic. Zřejmě maxima dosáhneme tehdy, když se dvě různé kružnice protínají právě ve dvou různých bodech a neexistují společné průniky tří kružnic. Přidáním n-té kružnice k $(n-1)$ předchozím se nová kružnice rozdělí $2 \cdot (n-1)$ průsečíky na $2 \cdot (n-1)$ oblouků, přičemž každý z nich dělí jednu – ale ne každou – z a_{n-1} oblastí na 2 – dělí jich právě $2 \cdot (n-1)$. Máme tedy rekurentní vztah

$$a_n = a_{n-1} + 2 \cdot (n-1)$$

pro $n \geq 2$, kam můžeme dále dosazovat

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2 \cdot (n-1) = \\ &= a_{n-2} + 2 \cdot \big((n-1) + (n-2)\big) = \\ &= a_{n-3} + 2 \cdot \big((n-1) + (n-2) + (n-3)\big) = \cdots = \\ &= a_1 + 2 \cdot \big((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\big) = 2 + 2 \cdot \frac{n\,(n-1)}{2} = n^2 - n + 2, \end{aligned}$$

čímž dostaneme explicitní vyjádření a_n pro $n \geq 2$. Vidíme, že pro $n = 1$ vzorec také funguje, neboť $1^2 - 1 + 2 = a_1$, tedy celkem dělí rovinu n kružnic na maximálně

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n^2 - n + 2 & n \geq 1 \end{cases}$$

oblastí. △

Poznámka. Aby bylo řešení úplně korektní, je potřeba dokázat, že n kružnic lze skutečně umístit v rovině tak, že se každé dvě protínají právě ve dvou bodech a přitom neexistují průsečíky tří a víc kružnic. Fakt, že dvě kružnice se protínají maximálně ve dvou bodech, je jednoduché dokázat. To, že je to možné pro n kružnic lze dokázat například indukcí. Důkaz nastíníme. Pro jednoduchost předpokládejme, že všechny kružnice mají stejný poloměr. Máme umístěných $n-1$ kružnic, chceme umístit n-tou. Její střed nesmí ležet moc *daleko*, čímž máme vyznačenou množinu možných středů n-té kružnice. Navíc jej musíme umístit tak, aby nevznikaly průsečíky tří, což ale znamená, že střed kružnice nesmí ležet na jedné z kružnic se středy v průsečících a stejnými poloměry. Tato zakázaná množina má ale *nulovou míru*, takže nová kružnice v obecné poloze bude mít s každou z předchozích 2 průsečíky.

Jinak si (poněkud nesprávně) lze představit situaci tak, že najdeme *Jordanovu křivku,*[3] která má právě 2 průsečíky s každou z předchozích $n-1$ kružnic, a následně deformujeme tuto křivku na kružnici tak, aby kýžená vlastnost zůstala zachována. Tento pohled je ovšem zavádějící a nevede k důkazu, protože již dvěma Jordanovými křivkami lze rovinu rozdělit na libovolně mnoho oblastí (ale minimálně na 2) – stačí si například představit hvězdu s k (oblými) cípy a skrz tyto cípy vést kružnici, což dělí rovinu na $2k+2$ oblastí, čímž již dosáhneme potenciálního nekonečna.

[3] Tedy hladkou uzavřenou křivku bez průsečíků samy se sebou.

Příklad 9.3. Spočítejte $\binom{-\frac{1}{2}}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}_0$.

Řešení. Nejprve si spočítáme prvních pár hodnot.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{0} = 1, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} = \frac{3}{8}$$
$$\binom{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}, \qquad \binom{-\frac{1}{2}}{3}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{6} = -\frac{15}{48} = -\frac{5}{16}$$

Nyní uvažujme případ obecného $n \in \mathbb{N}$. Díky vyjádření zobecněného kombinačního čísla (9.2) máme

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left[-\frac{1}{2}\right]_n}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdot\dots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$

což si symbolikou $\prod$ můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
&= \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-i\right)}{n!} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1}\left(-\frac{2\,i+1}{2}\right)}{n!} \\
&= (-1)^n\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2\,i+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2\,n-1)}{n!} = (-1)^n\frac{(2\,n-1)!!}{n!}
\end{aligned}$$

což nyní můžeme přepsat díky (9.4) a $2\,n-1 = 2\,(n-1)+1$ jako

$$= (-1)^n\frac{(2\,n-1)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^{n-1}\cdot(n-1)!}$$

což si díky vztahu $n+(n-1) = 2\,n-1$ můžeme nakonec napsat jako

$$= \frac{(-1)^n}{2^{2\,n-1}}\cdot\frac{(2\,n-1)!}{n!\,(n-1)!}.$$

Z posledního vyjádření dostaneme pro $n \geq 1$ vztah

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{2^{2\,n-1}}\cdot\binom{2\,n-1}{n}. \qquad \triangle$$

Příklad 9.4. Z váčku s 20 korunami, 15 dvoukorunami a 10 pětikorunami vytáhneme

a) 20 mincí,

b) 30 mincí.

Kolika způsoby to může dopadnout?

Řešení. Řešíme nejprve a). Předpokládejme, že vytáhneme i korunových mincí, j dvoukorun a k pětikorun. Platí

$$i + j + k = 20,$$

přičemž

$$\begin{aligned} i &\in \{0, 1, \dots, 20\}, \\ j &\in \{0, 1, \dots, 15\}, \\ k &\in \{0, 1, \dots, 10\}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Vzhledem k tomu, že vytahujeme 20 mincí, máme *nadbytek* korun, můžeme tedy zapomenout na omezení pro i. Pak sčítáme pro všechny možnosti $k = 0, \dots, 10$ počty dvojic (i, j), $j \leq 15$, řešící rovnici

$$i + j = 20 - k.$$

Je-li $k = 0$, máme 16 možností pro j (0, 1, ..., 15), každá z nich určuje jednoznačně i. Stejně tak máme 16 možností pro $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Tedy pro $k \leq 5$ máme $6 \cdot 16 = 96$ možností. Pro $k = 6$ máme již jen 15 možností ($j = 0, \dots, 14$). Pro $k = 7$ máme 14 možností, počet se dále snižuje o 1, až pro $k = 10$ máme 11 možností pro i a j. Celkem máme tedy

$$6 \cdot 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 = 161$$

možností. Podobně můžeme řešit b). Určujeme vlastně počet řešení rovnice

$$i + j + k = 30$$

se stejnými omezeními (9.7). Musíme tedy již dbát i na omezení pro i. Můžeme procházet všechny možnosti pro k a počítat počty řešení rovnice $i + j = 30 - k$. Je-li $k = 0$, máme 6 možností (díky omezení pro i musí být j minimálně 10 a maximálně 15). Pro $k = 1$ může být již j mezi 9 a 15, tedy 7 možností. Analogicky máme 8 možností pro $k = 2$, 9 pro $k = 3$, atd., až pro $k = 10$ máme 16 možností. Celkem máme tedy

$$6 + 7 + \cdots + 16 = \frac{17 \cdot 16}{2} - \frac{6 \cdot 5}{2} = 121$$

možností.

Úlohu lze také řešit pomocí vytvořujících funkcí. Označme a_n počet možností, kterými lze z váčku s 20 korunami vytáhnout n korun. Zřejmě $a_n = 1$ pro $n \leq 20$ a 0 jinak. Podobně označme b_n počet možností, kterými lze z váčku s 15 dvoukorunami vytáhnout n dvoukorun, a c_n počet možností, kterými lze z váčku s 10 pětikorunami vytáhnout n pětikorun. Zřejmě je $b_n = 1$ $n \leq 15$ a 0 jinak, podobně $c_n = 1$ pro $n \leq 10$ a 0 jinak. Počet možností, kterými lze z váčku s 20 korunami, 15 dvoukorunami a 10 pětikorunami je roven n-tému členu konvoluce těchto posloupností, tedy číslu $(a * b * c)_n$. Vytvořující funkce posloupností a_n, b_n a c_n jsou polynomy

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(a)(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{20}, \\ \mathrm{V}(b)(x) &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{15}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{V}(c)(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{10},$$

které si můžeme přepsat pomocí částečných součtů geometrických řad jako

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(a)(x) &= \frac{1 - x^{21}}{1 - x}, \\
\mathrm{V}(b)(x) &= \frac{1 - x^{16}}{1 - x}, \\
\mathrm{V}(c)(x) &= \frac{1 - x^{11}}{1 - x}.
\end{aligned}$$

Vytvořující funkce konvoluce posloupností $a * b * c$ je rovna součinu vytvořujících posloupností

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(a * b * c)(x) = \mathrm{V}(a)(x) \cdot \mathrm{V}(b)(x) \cdot \mathrm{V}(c)(x) &= \frac{x^{21} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{16} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{11} - 1}{x - 1} \\
&= \frac{1 - x^{11} - x^{16} - x^{21} + x^{27} + x^{32} + x^{37} - x^{48}}{(1 - x)^3}
\end{aligned}$$

kde pomocí trojí autokonvoluce posloupnosti samých jedniček (9.6) získáme vyjádření

$$= (1 - x^{11} - x^{16} - x^{21} + x^{27} + x^{32} + x^{37} - x^{48}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$$

kde řada napravo bude ve skutečnosti od 46. mocniny dále nulová. Dvacátou mocninu získáme pomocí součinů $1 \cdot x^{20}$ s koeficientem $\binom{22}{2}$, $x^{11} \cdot x^9$ s koeficientem $-\binom{11}{2}$ a $x^{16} \cdot x^4$ s koeficientem $-\binom{6}{2}$. U x^{20} máme tedy koeficient

$$\binom{22}{2} - \binom{11}{2} - \binom{6}{2} = 161.$$

Podobně třicátou mocninu získáme pomocí součinů $1 \cdot x^{30}$, $x^{11} \cdot x^{19}$, $x^{16} \cdot x^{14}$, $x^{21} \cdot x^9$ a $x^{27} \cdot x^3$ s výsledným koeficientem rovným součtu koeficientů

$$\binom{32}{2} - \binom{21}{2} - \binom{16}{2} - \binom{11}{2} + \binom{5}{2} = 121.$$

Vidíme, že 20 mincí můžeme vytáhnout 161 způsoby a 30 mincí můžeme vytáhnout 121 způsoby. △

Příklad 9.5. Jaká je pravděpodobnost, že na 10 kostkách padne součet 25?

Řešení. Mějme posloupnost a, kde a_n značí počet možností, že při hodu jednou (klasickou) kostkou padne číslo n. Zřejmě $a_n = 1$ pro n mezi 1 a 6 a 0 jinak. Protože jsou hody deseti kostkami na sobě nezávislé, odpovídá počet možností, že součet při hodu bude n, n-tému členu desetinásobné konvoluce posloupnosti a se sebou. Členy této posloupnosti získáme pomocí vytvořujících funkcí. Máme

$$\mathrm{V}(a)(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x \cdot \frac{1-x^6}{1-x}.$$

Pak

$$\mathrm{V}(a^{*10})(x) = (\mathrm{V}(a)(x))^{10} = x^{10}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^{10}$$

Výraz na pravé straně si můžeme upravit. Pomocí binomické věty máme

$$(1-x)^{10} = \sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6\,i}.$$

Pak s využitím (9.6) máme

$$\mathrm{V}(a^{*10})(x) = x^{10}\cdot\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}x^{6\,i}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+9}{9}x^j.$$

Hledáme koeficient u x^{25}. Hledáme vlastně všechna řešení rovnice

$$10 + 6\,i + j = 25,$$

neboli $6\,i + j = 15$. Máme pouze 3 možnosti – $i = 0$ a $j = 15$ s koeficientem $(-1)^{10}\binom{10}{0}\cdot$ $\cdot\binom{15+9}{9}$, $i = 1$ a $j = 9$ s koeficientem $(-1)^1\binom{10}{1}\cdot\binom{9+9}{9}$ a $i = 2$ a $j = 3$ s koeficientem $(-1)^2\binom{10}{2}\cdot\binom{3+9}{9}$. Celkem je tedy koeficient u x^{25} roven součtu, tedy číslu

$$\binom{24}{9} - 10\binom{18}{9} + \binom{10}{2}\binom{12}{9} = 831\,204.$$

Součet 25 při hodu 10 kostkami tedy může padnout 831 204 způsoby. Celkem může při hodu 10 kostkami padnout 6^{10} možností. Pravděpodobnost, že součet bude 25 je tedy

$$\frac{831\,204}{6^{10}} = \frac{831\,204}{60\,466\,176} = \frac{23\,089}{1\,679\,616} \approx 1,375\,\%. \qquad \triangle$$