Kapitola 10

Posloupnosti, vytvořující funkce

10.1 Opakování z přednášky

Mějme posloupnost přirozených (celých, reálných, komplexních, ...) čísel $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Její vytvořující funkcí rozumíme (formální) mocninnou řadu

$$\mathrm{V}\, a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n.$$

Konverguje-li tato řada absolutně na nějakém okolí 0, pak zadává na okolí 0 (hladkou) funkci.[1] Dostáváme tak korespondenci mezi (vhodnými) posloupnostmi čísel a analytickými funkcemi definovanými na nějakém okolí nuly. Danou funkci značíme $\mathrm{V}\, a$, nebo $\mathrm{V}(a)(x)$.

Pro příklad je vytvořující funkce posloupnosti samých jedniček geometrická řada

$$V(\{1\}_{n=0}^{\infty}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Zde je přehled vlastností vytvořujících funkcí posloupností.

- Přiřazení vytvořující funkce je *lineární operátor*, tj.

  $$\mathrm{V}(\alpha\, a + \beta\, b) = \alpha\ \mathrm{V}\, a + \beta\ \mathrm{V}\, b$$

  pro α, $\beta \in \mathbb{R}$ a a, b posloupnosti.

- Vytvořující funkce má v nule všechny deriace, tj. Taylorův rozvoj vytvořující funkce je

  $$\mathrm{V}(a)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{V}(a)^{(k)}(0)}{k!}\, x^k,$$

  odkud

  $$\mathrm{V}^{(k)}(0) = k!\, a_k.$$

- Vytvořující funkce lze derivovat jako řadu člen po členu i jako funkci, zde je nutný nenulový poloměr konvergence řady! Pak

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{V}(a)(x)}{\mathrm{d}x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, a_{k+1}\, x^k,$$

  tj. jedná se o vytvořující funkci posloupnosti $\{(k+1)\, a_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$.

- Podobně lze vytvořující funkci integrovat jako funkci i jako mocninnou řadu člen po členu. Stejně jako v případě derivace je nutný nenulový poloměr konvergence. Pak

$$\int_0^x \mathrm{V}(a)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

  takže jde o vytvořující funkci posloupnosti A definované vztahy $A_0 = 0$ a $A_k = \frac{a_{k-1}}{k}$ pro $k \geq 1$.

- Konvolučním součinem dvou posloupností $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $b = \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ rozumíme posloupnost $a * b$, kde

$$(a * b)_k = \sum_{i+j=k} a_i\, b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}.$$

  Jedná se o koeficient k-tého člene rozvoje součinu $\mathrm{V}(a)\cdot\mathrm{V}(b)$, jelikož se jedná o koeficient k-tého člene v Cauchyovském součinu mocninných řad. Odtud vidíme, že konvlouční součin je asociativní, komutativní a distributivní vzhledem ke sčítání.

- Konstanty $\alpha \in \mathbb{R}$ si můžeme ztotožnit s posloupnostmi $(\alpha, 0, 0, \dots)$. Pak skalární násobek $\alpha\, a$ posloupnosti a odpovídá součinu $\alpha * a$.

- Lineární funkce x je vytvořující funkcí posloupnosti $(0, 1, 0, 0, \dots) =: x$, kterou proto označíme stejně. Pak x^n je vytvořující funkcí posloupnosti $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{n} = x^{*n}$.

- Polynomy jsou vytvořující funkce konečných posloupností. Vzhledem k předchozímu lze polynom $p_0 + p_1\, x + \cdots + p_n\, x^n$ chápat jako vytvořující funkci posloupnosti

$$p_0 + p_1 * x + \cdots + p_n * x^{*n},$$

  kde konstanty a x chápeme jako posloupnosti dle předchozích bodů.

- Mějme posloupnost $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $n \in \mathbb{N}$. Definujme posloupnost b předpisem $b_k = 0$ pro $k < n$ a $b_k = a_{k-n}$ pro $k \geq n$. Jedná se o posloupnost $(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, a_0, a_1 \dots)$. Pomocí konvoluce ji lze vyjádřit jako $b = a * x^{*n}$, tudíž $\mathrm{V}\, b = x^n\ \mathrm{V}\, a$.

- Mějme posloupnost $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $n \in \mathbb{N}$. Definujme posloupnost b předpisem $b_k = a_{k+n}$. Pak
$$\mathrm{V}(b)(x) = \frac{\mathrm{V}(a)(x) - a_0 - a_1\,x - \ldots - a_{n-1}\,x^{n-1}}{x^n}. \tag{10.1}$$
(Tento vztah by také bylo možné zapsat pomocí konvolucí, museli bychom ale povolit indexování členů posloupností i zápornými čísly.)

Na závěr si připomeňme některé užitečné vzorečky. Nechť $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Posloupnost částečných součtů definujeme předpisem $s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Pak platí
$$\mathrm{V}(s)(x) = \frac{\mathrm{V}(a)(x)}{1-x} \tag{10.2}$$
Dvěma způsoby si odvodíme následující vzorec.
$$\frac{1}{(1-\alpha\,x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n}{n} \alpha^k\,x^k \tag{10.3}$$
Začneme se součtem geometrické řady $\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{1-y}$. Substitucí $y = \alpha\,x$ získáme vztah
$$\frac{1}{1-\alpha\,x} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k\,x^k, \tag{10.4}$$
kde suma napravo konverguje absolutně na intervalu $\left(-\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\alpha|}\right)$. Můžeme proto (10.4) n-krát derivovat, čímž dostaneme
$$(-1)\,(-2)\cdots(-n)\frac{(-\alpha)^n}{(1-\alpha\,x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k\,k\,(k-1)\cdots(k-n+1)\,x^{k-n}$$
což si můžeme dále upravit na
$$n!\,\frac{\alpha^n}{(1-\alpha x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+n}\,(k+n)\,(k+n-1)\cdots(k+1)\,x^k$$
kde pravou stranu upravíme na
$$n!\,\frac{\alpha^n}{(1-\alpha x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k+n}\,\frac{(k+n)!}{k!}\,x^k$$
odkud podělením rovnice $n!$ a α^n dostaneme
$$\frac{1}{(1-\alpha x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \frac{(k+n)!}{k!\,n!}\,x^k.$$
Platí ovšem $\frac{(k+n)!}{k!\,n!} = \binom{k+n}{k} = \binom{k+n}{n}$, čímž dostaneme finální vzoreček. Jinou možností je nejprve vzít $(n+1)$-násobnou autokonvoluci posloupnosti samých jedniček, kde k-tý člen bude počet řešení rovnice $i_1 + \cdots + i_{n+1} = k$, tedy kombinační číslo $\binom{k+n+1-1}{n+1-1} = \binom{k+n}{n}$ (dělíme k jedniček do $n+1$ přihrádek). Následně stačí vzít substituci $y = \alpha\,x$.

10.2 Příklady řešené na cvičení

Příklad 10.1. Rozložte na parciální zlomky funkci

$$\frac{5\,x-4}{x^2-x-2}.$$

Řešení. Máme rozklad

$$x^2-x-2=(x+1)\,(x-2).$$

Proto můžeme psát

$$\frac{5\,x-4}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}. \tag{10.5}$$

Zbývá najít konstanty A a B. Rovnici (10.5) si vynásobíme x^2-x-2 a na pravé straně si výraz upravíme na lineární tvaru $a\,x+b$.

$$\begin{aligned}5\,x-4&=A\,(x+1)+B\,(x-2)\\5\,x-4&=(A+B)\,x+A-2\,B\end{aligned}$$

Nyní si díky lineární nezávislosti 1 a x vyjádřime rovnici jako lineární soustavu

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}.$$

Tu řešíme například pomocí Gaussovy eliminace.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 5\\1 & -2 & -4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 5\\0 & -3 & -9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 5\\0 & 1 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{array}\right)$$

Vidíme, že $A=2$ a $B=3$. Máme tedy rozklad na parciální zlomky

$$\frac{5\,x-4}{x^2-x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}.$$

△

Příklad 10.2. Rozviňte do mocninné řady následující funkce.

a) $\frac{1}{(1-x)^2}$ b) $\frac{5\,x-4}{x^2*-x-2}$ c) $\frac{x}{x+5}$ d) $\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3}$

Řešení. a) Máme funkci $\frac{1}{(1-x)^2}$. Můžeme si pomoci součtem geometrické řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x} \tag{10.6}$$

která konverguje *absolutně* na $(-1,1)$. Lze proto derivovat (10.6) člen po členu.

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\,x^{k-1}=-1\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-2}$$

Výrazy si upravíme a dostaneme výsledný rozvoj do geometrické řady.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k$$

Jiná možnost řešení je vzpomenout si na vzorec (10.3) pro $\alpha = 1$. Z něj máme rozklad rovnou.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{1} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k$$

Řada konverguje na $(-1, 1)$.

b) Funkce je stejná jako v příkladu 10.1. Máme tedy rozklad na parciální zlomky

$$\frac{5\,x-4}{x^2-x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+1}.$$

Každý ze zlomků si rozvineme zvlášť. Máme rovnou

$$\frac{3}{1+x} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k$$

na $(-1, 1)$. Dále počítáme

$$\frac{2}{x-2} = -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, x^k.$$

Řada konverguje pro $\frac{x}{2} \in (-1, 1)$, neboli na intervalu $(-2, 2)$. Výsledný rozvoj získáme jako součet řad, který bude konvergovat na průniku, tedy na intervalu $(-1, 1)$.

$$\frac{5\,x-4}{x^2-x-2} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(3 \cdot (-1)^k - \frac{1}{2^k}\right) x^k$$

c) Můžeme si funkci $\frac{x}{x+5}$ upravovat a rovnou získáme rozvoj.

$$\frac{x}{x+5} = \frac{x}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{5}} = \frac{x}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{5}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{5^k}\, x^k$$

Řada konverguje pro $-\frac{x}{5} \in (-1, 1)$, neboli pro $x \in (-5, 5)$.

d) Nejprve si musíme funkci $\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3}$ rozložit na parciální zlomky. Máme rozklad

$$2\,x^3 - x^2 - 4\,x + 3 = (x-1)^2\,(2\,x+3).$$

Pak bude platit

$$\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2\,x+3} \tag{10.7}$$

pro nějaké konstanty A, B, $C \in \mathbb{Q}$. Nalezneme je obvyklým způsobem – rovnici (10.7) si vynásobíme $(x-1)^2\,(2\,x+3)$ a dáme si k sobě koeficienty u monomů příslušné mocniny.

$$\begin{aligned}
x^2+x+2 &= A\,(x-1)(2\,x+3)+B\,(2\,x+3)+C\,(x-1)^2\\
x^2+x+2 &= (2\,A+C)\,x^2+(A+2\,B-2\,C)\,x-3\,A+3\,B+C
\end{aligned}$$

Dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A\\ B\\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix},$$

kterou řešíme pomocí Gaussovy eliminace s výběrem pivota.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -2 & 1\\ -3 & 3 & 1 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 0 & 3\\ -5 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 0 & 4\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 1\\ 25 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 5 & 0 & 4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 25 & 11\\ 25 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 5 & 0 & 4\end{array}\right)$$

Pak $A=\frac{7}{25}$, $B=\frac{4}{5}$ a $C=\frac{11}{25}$. Máme tedy rozklad

$$\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3}=\frac{7}{25}\,\frac{1}{x-1}+\frac{4}{5}\,\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{11}{25}\,\frac{1}{2\,x+3}$$

což si upravíme do tvaru vhodného pro použití vzorce (10.3)

$$=-\frac{7}{25}\,\frac{1}{1-x}+\frac{4}{5}\,\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{11}{75}\,\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\,x\right)}.$$

Za použití (10.3), resp. (10.4) dostaneme

$$\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{7}{25}+\frac{4}{5}\binom{k+1}{1}+\frac{11}{75}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\right]x^k,$$

což si upravíme na finální rozvoj

$$\frac{x^2+x+2}{2\,x^3-x^2-4\,x+3}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4}{5}\,k+\frac{13}{25}+\frac{11}{25}\,\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}\right]x^k. \qquad \triangle$$

Příklad 10.3. Určete vytvořující funkce pro následující posloupnosti.

a) $\left\{2\,(k+1)\right\}_{k=0}^{\infty}$

b) $\left\{2\,k+1\right\}_{k=0}^{\infty}$

c) $\left\{(-1)^k\,(k+1)\right\}_{k=0}^{\infty}$

d) $\left\{(k+1)^3\right\}$

Řešení. a) Vytvořující funkcí bude součet mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2\cdot(k+1)\,x^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k = \frac{2}{(1-x)^2},$$

kde jsme si vzpomněli na řešení části a) příkladu 10.2. Řada má součet pro všechna $x \in (-1,1)$, což bude také definiční obor naší vytvořující funkce.

b) Opět hledáme součet mocninné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2\,k+1)\,x^k.$$

Můžeme si psát $2\,k+1 = 2\,(k+1)-1$, tedy

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2\,k+1)\,x^k = 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k - \sum_{k=0}^{\infty}x^k,$$

kde pro pravou stranu použijeme vzorec (10.3), čímž dostaneme výsledek

$$\sum_{k=0}^{\infty}(2\,k+1)\,x^k = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

c) Hledáme součet

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,x^k.$$

Jelikož $k+1 = \binom{k+1}{1}$, stačí použít vzorec (10.3) pro $n=1$ a $\alpha=-1$. Máme tak na $(-1,1)$ součet

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(k+1)\,x^k = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

d) Hledáme součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^3\,x^k.$$

Vzpomeneme si na (10.3), odkud na intervalu $(-1,1)$ máme

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}\,x^k.$$

Chceme si výraz $(k+1)^3$ vyjádřit pomocí kombinačních čísel tvaru $\binom{k+n}{n}$. Máme

$$k+1 = \binom{k+1}{1}. \tag{10.8}$$

Dále

$$\binom{k+2}{2} = \frac{(k+2)\,(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\,(k+1+1)\,(k+1) = \frac{1}{2}\Big((k+1)^2 + (k+1)\Big),$$

neboli (s vyjádřením $k+1$ z (10.8))

$$(k+1)^2 = 2\cdot\binom{k+2}{2} - \binom{k+1}{1}. \tag{10.9}$$

Následně

$$\begin{aligned}\binom{k+3}{3} = \frac{(k+3)\,(k+2)\,(k+1)}{6} &= \frac{1}{6}\,(k+1)\,(k+1+1)\,(k+1+2) = \\ &= \frac{1}{6}\Big((k+1)^3 + 3\,(k+1)^2 + 2\,(k+1)\Big),\end{aligned}$$

takže

$$(k+1)^3 = 6\cdot\binom{k+3}{3} - 3\,(k+1)^2 - 2\,(k+1),$$

kam si dosadíme za $(k+1)^2$ z (10.9) a za $k+1$ z (10.8), takže máme

$$(k+1)^3 = 6\cdot\binom{k+3}{3} - 6\cdot\binom{k+2}{2} + \binom{k+1}{1}. \tag{10.10}$$

Pak díky (10.10) a (10.3) dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^3\,x^k &= 6\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k - 6\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+1}{1}x^k \\ &= \frac{6}{(1-x)^4} - \frac{6}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{6-6\,(1-x)+(1-x)^2}{(1-x)^4} \\ &= \frac{x^2+4\,x-1}{(x-1)^4}\end{aligned}$$

vytvořující funkci na intervalu $(-1,1)$. △

Poznámka (k části d)). (Zobecněné) kombinační číslo $\binom{x+n}{n}$ je díky definici

$$\binom{x+n}{n} = \frac{[x+n]_n}{n} = \frac{(x+n)\cdot(x+n-1)\cdot\dots\cdot(x+1)}{n!}$$

vlastně *polynomem* stupně n v proměnné x, lze tedy říci, že $\binom{x+n}{n} \in \mathbb{Q}[x]$ ($\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$), přičemž o jedna se zvětšující stupně zajišťují, že množina

$$\left\{\binom{x+n}{n}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

tvoří *bázi* vektorového prostoru polynomů nad daným tělesem. To znamená, že libovolný polynom

$$p(x) \in \mathbb{Q}[x] \quad (\text{nebo } \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x])$$

lze vyjádřit jako (konečnou) lineární kombinaci zobecněných kombinačních čísel podobným způsobem jako v části d). Stejně jako tam je výpočet *rekurentní* – mocninu x^n si vyjádříme pomocí $\binom{x+n}{n}$ a *nižších* mocnin x. Lze tedy říci, že vytvořující funkce posloupnosti $\{p(k)\}_{k=0}^{\infty}$, kde p je nějaký polynom, bude lineární kombinací funkcí $\frac{1}{(1-x)^{n+1}}$, přičemž nejvyšší použité n je právě stupeň polynomu p.

Příklad 10.4. Najděte vzorec pro součet $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2$.

Řešení. Uvažujme posloupnost $a_k = k^2$ pro $k \in \mathbb{N}_0$. Hledáme vzorec pro částečný součet členů této posloupnosti, tedy pro předpis posloupnosti $s_k = \sum_{i=0}^{k} a_k$. Použijeme k tomu vytvořující funkce.

Chceme vyjádřit k^2 jako lineární kombinaci $\binom{k+n}{n}$. Máme

$$2 \cdot \binom{k+2}{2} = 2 \cdot \frac{(k+2)\,(k+1)}{2} = k^2 + 3\,k + 2,$$

neboli $k^2 = 2\binom{k+2}{2} - 3\,k - 2$. Jelikož $k = \binom{k+1}{1} - 1$, dostáváme

$$k^2 = 2\binom{k+2}{2} - 3\binom{k+1}{1} + 1.$$

Pak vytvořující funkce posloupnosti a je (vzpomeneme si na (10.3))

$$\mathrm{V}(a)(x) = \frac{2}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}.$$

Díky (10.2) máme

$$\mathrm{V}(s)(x) = \frac{\mathrm{V}(a)(x)}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^4} - \frac{3}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Následně opět použijeme (10.3), abychom získali výsledek:

$$\begin{aligned} s_k &= 2\binom{k+3}{3} - 3\binom{k+2}{2} + 1\binom{k+1}{1} \\ &= \frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6}. \end{aligned}$$

△

Poznámka. Podobně by se dalo postupovat i obecněji. Máme-li posloupnost $a_k = p(k)$, kde

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1\, x + \cdots + p_n\, x^n \\ &= P_0 \binom{x+0}{0} + P_1 \binom{x+1}{1} + \cdots + P_n \binom{x+n}{n} \end{aligned}$$

je polynom, bude pro posloupnost částečných součtů posloupnosti a_k platit

$$s_k = P_0 \binom{k+1}{1} + P_1 \binom{k+2}{2} + \cdots + P_n \binom{k+n+1}{n+1}.$$

Příklad 10.5. Najděte vzorec pro součet $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{k+1}\, k$.

Řešení. Intuitivně bychom viděli, že součty jsou 1, -1, 2, -2, atd. Pak pro $\ell \geq 1$ platí $s_{2\ell-1} = -\ell$ a $s_{2\ell} = \ell$.

Najděme explicitní vzorec pro k-tý člen pomocí vytvořujících funkcí. Zaveďme si proto posloupnost $a = \{(-1)^k\,(k+1)\}_{k=0}^{\infty}$ a posloupnost jejích částečných součtů s. Potřebujeme získat vytvořující funkce $\mathrm{V}\, a$ a $\mathrm{V}\, s$. Podle vzorce (10.3) pro $n = 1$ a $\alpha = -1$ máme na $(-1, 1)$

$$\mathrm{V}(a)(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Následně máme podle (10.2)

$$\mathrm{V}(s)(x) = \frac{1}{(1+x)^2\,(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1-x}.$$

Musíme určit konstanty A, B a C. Platí

$$\begin{aligned} 1 &= A\,(1-x^2) + B\,(1-x) + C\,(1+x)^2 = A\,(1-x^2) + B\,(1-x) + C\,(1+2\,x+x^2) \\ &= (-A+C)\,x^2 + (-B+2\,C)\,x + A + B + C. \end{aligned}$$

Řešíme tedy lineární rovnici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schematicky

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

tedy $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ a $C = \frac{1}{4}$. Pak

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(s)(x) &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} \\ &\overset{(10.3)}{=} \frac{1}{4}\,\mathrm{V}\Big((-1)^k\Big)(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{V}\Big((-1)^k\,(k+1)\Big)(x) + \frac{1}{4}\,\mathrm{V}(1)(x), \end{aligned}$$

tedy

$$s_k = \frac{2\,(-1)^k\,(k+1) + (-1)^k + 1}{4} = \frac{(-1)^k\,(2\,k+3)+1}{4}. \qquad \triangle$$

Příklad 10.6. Nechť $p \in \mathbb{N}$ je perioda. Definujme posloupnost a_k předpisem

$$a_k := \begin{cases} 1 & p \mid k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete vytvořující funkci posloupnosti a a vzorec pro k-tý člen.

Řešení. Pokud $p = 1$, pak $a_k = 1$ pro každé k (což je rovnou předpis pro k-tý člen) a vytvořující funkce je $\frac{1}{1-x}$. Nechť tedy $p > 1$. Pak zřejmě

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(a)(x) &= 1 + x^p + x^{2\,p} + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^{p\,k} = \frac{1}{1-x^p}. \end{aligned}$$

Pro zjištění předpisu pro k-tý člen chceme rozložit polynom $1 - x^p$ na lineární činitele tvaru $1 - \alpha x$. Substitucí $x = \frac{1}{t}$ a vynásobením t^p bychom zjistili, že α budou právě kořeny polynomu $x^p - 1$. Vezměme

$$\zeta_p := \mathrm{e}^{\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}}{p}} = \cos\frac{2\,\pi}{p} + \mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Jedná se o p-tou odmocninu z jedné, neboť

$$\zeta_p^p = \left(\mathrm{e}^{\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}}{p}}\right)^p = \mathrm{e}^{p\cdot\frac{2\,\pi\,\mathrm{i}}{p}} = \mathrm{e}^{2\,\pi\,\mathrm{i}} = 1.$$

Ze stejného důvodu bude také i (celočíselná) mocnina ζ_p odmocninou z jedné. Jelikož má $x^p - 1$ v $\mathbb{C}$ p různých kořenů (má p kořenů počítaných i s násobností a je nesoudělný se svojí derivací), jsou jimi právě různé mocniny ζ_p. Máme tak rozklad

$$\begin{aligned} 1 - x^p &= \prod_{i=1}^{p}(1 - \zeta_p^i) \\ &= (1 - \zeta_p\,x)\cdot(1 - \zeta_p^2\,x)\cdot\cdots\cdot(1 - \zeta_p^{p-1}x)\cdot(1-x). \end{aligned}$$

Bude tedy platit

$$\mathrm{V}(a)(x) = \frac{1}{1-x^p} = \frac{A_1}{1-\zeta_p\,x} + \cdots + \frac{A_p}{1-x}$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{A_i}{1-\zeta_p^i\, x}.$$

Vynásobením $1 - x^p$ zjistíme, že

$$1 = \sum_{i=1}^{p} A_i \prod_{j\neq i} (1-\zeta_p^j\, x).$$

Z Viètových vztahů plyne, že

$$\sum_{i=1}^{p} \zeta_p^i = \sum_{i\neq j} \zeta_p^i \zeta_p^j = \cdots = \sum_{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_n} \zeta_p^{i_1}\cdot\cdots\cdot\zeta_p^{i_n} = 0$$

a to pro všechny n-tice pro n od jedné po $p-1$. Odtud vidíme, že můžeme vzít $A_i = \frac{1}{p}$. (Jelikož součet A_i s koeficienty rovnými součinům mocnin ζ_p^j musí být vždy nulový, což je splněno, jsou-li A_i stejné; $\sum_{i=1}^{p} A_i = 1$ určuje hodnotu A_i). Máme tedy

$$\mathrm{V}(a)(x) = \frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{1-\zeta_p\, x} + \frac{1}{1-\zeta_p^2\, x} + \cdots + \frac{1}{1-\zeta_p^{p-1}\, x} + \frac{1}{1-x}\right],$$

odkud můžeme získat vzorec pro k-tý člen.

$$a_k = \frac{\zeta_p^k + \zeta_p^{2\,k} + \cdots + \zeta_p^{(p-1)\,k} + 1}{p} \qquad \triangle$$

Poznámka. Číslo ζ_p je obecně komplexní iracionální. (Je však vždy algebraické jako kořen polynomu $x^p - 1$.) Reálné je pouze pro $p = 1$ – $\zeta_1 = 1$ – a pro $p = 2$ – $\zeta_2 = -1$. Máme pro $p = 2$ vytvořující funkci

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right],$$

a odtud vzorec $\frac{(-1)^k+1}{2}$ pro posloupnost, kde sudé členy jsou 1 a liché 0. Dále například pro $p = 4$ máme $\zeta_4 = \mathrm{i}$, rozklad

$$\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-\mathrm{i}\,x} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\,x}\right]$$

a vzorec

$$\frac{1+(-1)^k+\mathrm{i}^k+(-\mathrm{i})^k}{4} = \frac{\mathrm{i}^k+\mathrm{i}^{2\,k}+\mathrm{i}^{3\,k}+\mathrm{i}^{4\,k}}{4} = \begin{cases} 1 & 4 \mid k \\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Poznámka. Podobně můžeme získat vzorec pro k-tý člen libovolné periodické posloupnosti. Je-li posloupnost b_k periodická s periodou p, lze ji určit konečně mnoha hodnotami B_0, B_1, …, B_{p-1}. Pak b_k je rovno tomu z B_ℓ, pro něž je $k \equiv \ell \pmod{p}$. To lze také psát tak, že

$$b_k = \sum_{i=0}^{p-1} B_i\, a_{k-i},$$

neboli že je b součtem vhodných násobků vhodně posunutých posloupností a. Pak díky vlastnostem vytvořujících funkcí je

$$\mathrm{V}(b)(x) = \frac{B_0 + B_1\,x + \cdots + B_{p-1}\,x^{p-1}}{1 - x^p}$$

a

$$b_k = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{B_i}{p} \cdot \Big(\zeta_p^{k-i} + \zeta_p^{2\,(k-i)} + \cdots + \zeta_p^{(p-1)\,(k-i)} + 1\Big).$$

Samozřejmě však tyto vzorce nejsou pro praktické počítání příliš vhodné, při implementaci je daleko jednodušší použít podmíněný příkaz.