

Algebra I – vzor písemky

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda ... je pologrupa/monoid/grupa/okruh/obor integrity/těleso.

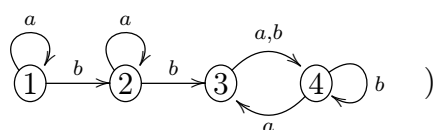
(*například* Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je operace definovaná předpisem $a * b = a + b - ab$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$, je pologrupa a zda je to grupa.)

nebo

Rozhodněte, zda ... je podpogrupa/podmonoid/podgrupa/normální podgrupa/podokruh/ideál v

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu

(*automat může být například*



3. (15 bodů) Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $(G, \cdot)/H$.

například

$$(G, \cdot) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right)$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ bi & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \{-1, 1\}, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla ... nad \mathbb{Q} .

(*číslo může být například $1 + \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot i$, $\sqrt{3} + \sqrt[3]{\sqrt{3} + 3}$, $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 3$)*

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo $\frac{1}{\dots}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

(*číslo může být například $\frac{1}{\alpha^2 - \alpha + 1}$, kde α splňuje $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha = -2$)*

6. – 7. (2 × 10 bodů) Dejte příklad pologrupy/grupy/okruhu/homomorfismu daných vlastností.

(*například* grupy, která obsahuje prvky všech řádů *nebo* nekonečné grupy a její podgrupy indexu 10)

8. (5 bodů) Definujte

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení

10. (10 bodů) Dokažte

V příkladech 8. – 10. se může vyskytnout pouze to, co se probíralo na přednášce.