Algebra I – podzim 2015 – 1. termín

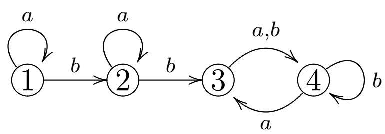
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda množina

$$H = \left\{ \frac{s}{2^n} \mid s \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0 \right\} \times \mathbb{Z}$$

je podgrupa, případně normální podgrupa, grupy $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je operace definovaná pro všechna $p, q \in \mathbb{Q}$ a $y, z \in \mathbb{Z}$ předpisem $(p, y)*(q, z) = (p+2^y \cdot q, y+z)$.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & q & 0 \\ f & g & 1 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ r \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathbb{R}[x],\ g \text{ má kořen } 5 \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & 0 \\ f & g & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathbb{R}[x] \text{ mají kořen } 5 \right\}.$$

4. (10 bodů) Rozložte polynom $x^7 + 3x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 8$ na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$.

5. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2} \cdot \mathrm{i} + \sqrt[6]{2} \cdot \mathrm{i}$ nad $\mathbb{Q}$.

6. (15 bodů) Vyjádřete číslo $\frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{2} + \sqrt{2} + 1}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

7. (5 bodů) Dejte příklad grupy a jejích dvou prvků, které mají stejný konečný řád, ale jejich součin má řád větší. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

8. (5 bodů) Dejte příklad netriviálního okruhu $(R, +, \cdot)$ takového, že $(R, \cdot, +)$ je rovněž okruh. Pokud takový okruh neexistuje, zdůvodněte proč.

9. (5 bodů) Dejte příklad dvou homomorfismů grup $\varphi, \psi \colon G \to H$, které mají stejné jádro, ale $\varphi(G) \neq \psi(G)$. Pokud takové homomorfismy neexistují, zdůvodněte proč.

10. (5 bodů) Definujte nerozložitelné prvky oboru integrity.

11. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.

12. (5 bodů) Dokažte, že jsou-li $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ grupy a $\varphi \colon G \to H$ homomorfismus pologrup, tak je φ i homomorfismem grup.