Algebra I – podzim 2017 – 1. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda předpis

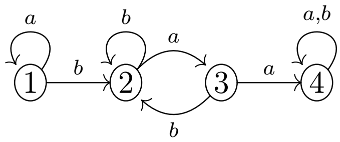
$$(x, y) * (z, t) = \left(\frac{x+y+z-t}{2}, \frac{x+y-z+t}{2} \right)$$

definuje operaci na množině

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x \geq |y| \}$$

takovou, že $(S, *)$ je pologrupa, případně monoid.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

$$\big((\mathbb{Z}[x], +) \times (\mathbb{C}, +)\big)/H,$$

kde

$$H = \{ (f, f(1) + a \cdot \mathrm{i}) \mid a \in \mathbb{R},\ f \in \mathbb{Z}[x] \text{ má kořen } \sqrt{2} \}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt{\sqrt{3}+1} \cdot \mathrm{i} - \sqrt{3} + 1$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo $\frac{1}{\alpha^2+3\alpha+1}$, kde α splňuje $\alpha^2 \cdot (\alpha^2 + 2) = -26\alpha - 6$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. (10 bodů) Dejte příklad dvou neizomorfních šestiprvkových grup.

7. (10 bodů) Dejte příklad oboru integrity R, který není těleso, a homomorfismu $\varphi\colon R \to R$, který není identitou na R a přitom $\varphi \circ \varphi$ identitou na R je.

8. (5 bodů) Definujte okruh a jeho charakteristiku.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci a jednoznačnosti podílového tělesa.

10. (10 bodů) Dokažte, že každá podgrupa nekonečné cyklické grupy je cyklická.