Algebra I – podzim 2019 – 2. termín

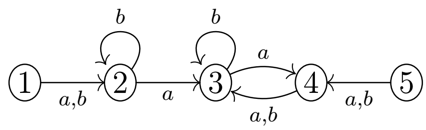
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda předpisy

$$(a,b,c,d,e)\oplus(p,q,r,s,t)=(a+p,b+q,c+r,d+s,e+t),$$
$$(a,b,c,d,e)\odot(p,q,r,s,t)=(ap,bp+q,cr,as+dr,bs+er+t)$$

definují
1) na množině $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ strukturu okruhu $(R,\oplus,\odot)$;
2) na množině $G=(\mathbb{Q}\setminus\{0\})\times\mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ strukturu grupy $(G,\odot)$.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G,\cdot)/H$, kde

$$G=\left\{\begin{pmatrix}p&0&f\\0&q&g\\0&0&p\end{pmatrix}\;\middle|\; p,q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ f,g\in\mathbb{Q}[x]\right\},$$
$$H=\left\{\begin{pmatrix}p&0&f\\0&p&g\\0&0&p\end{pmatrix}\;\middle|\; p\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\ f,g\in\mathbb{Q}[x],\ f(1)=f(2),\ f \text{ má kořen } \sqrt{2}\right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\mathrm{i}-\sqrt{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^3-\alpha^2+2\alpha+1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $(\alpha^3+4)(\alpha+2)=-2$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu, který není tělesem, a jeho podokruhu, který tělesem je.

7. (10 bodů) Dejte příklad grupy G a dvou grupových homomorfismů $\varphi,\psi\colon G\to G$, které mají stejné jádro, ale jiný obraz.

8. (5 bodů) Definujte, co se rozumí tím, když se o oboru integrity řekne, že je s jednoznačným rozkladem.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu grup na tři homomorfismy speciálních typů.

10. (10 bodů) Dokažte, že konečná tělesa jsou právě konečné obory integrity.