Algebra I – podzim 2021 – 1. termín

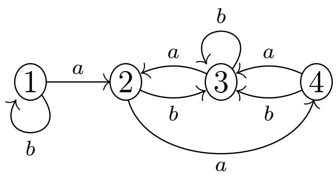
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Pro každou z množin

$$M_1 = \{\, a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Z},\ [a]_2 = [b]_2 = [c]_2 \,\},$$
$$M_2 = \{\, a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Z},\ [a]_3 = [b]_3 = [c]_3 \,\},$$
$$M_3 = \{\, a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Z},\ [b]_2 = [c]_2 \,\},$$
$$M_4 = \{\, a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Z},\ [b]_3 = [c]_3 \,\}$$

rozhodněte, zda je podokruhem, případně ideálem, okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{3}]$.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

$$\big((\mathbb{R}[x], +) \times (\mathbb{R}[x], +) \times (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)\big)/H,$$

kde

$$H = \big\{\, (f, g, 2z, z) \mid f, g \in \mathbb{R}[x],\ z \in \mathbb{Z},\ f(1) = g(3),\ (x^2 - 2x + 2) \text{ dělí } f \,\big\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 + 3\alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(2 - \alpha) = 2\alpha + 2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy, která má až na izomorfismus právě šest homomorfních obrazů.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad oboru integrity $(R, +, \cdot)$, který má nekonečně mnoho podokruhů, ale žádný jeho podokruh není tělesem. Uveďte rovněž příklad nekonečně mnoha podokruhů okruhu $(R, +, \cdot)$.

8. **(5 bodů)** Definujte nerozložitelný prvek oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující vztah mezi rozklady polynomů nad $\mathbb{Q}$ a nad $\mathbb{Z}$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý pologrupový homomorfismus mezi dvěma grupami je homomorfismem grupovým. Vycházejte přitom přímo z definic homomorfismů a grupy.