Algebra I – podzim 2021 – 2. termín

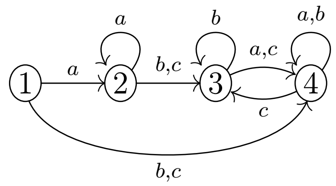
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Pro každou z množin

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{\, f \in S_{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon |f(n) - f(n+1)| \leq 2 \,\},\\
M_2 &= \{\, f \in S_{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon |f(n) - f(n+1)| = 2 \,\},\\
M_3 &= \{\, f \in S_{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}\colon |f(n) - f(n+1)| \geq 2 \,\},\\
M_4 &= \{\, f \in S_{\mathbb{N}} \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\colon |f(n) - f(n+1)| \leq k \,\},\\
M_5 &= \{\, f \in S_{\mathbb{N}} \mid \exists k \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}\colon |f(n) - f(n+1)| = k \,\}
\end{aligned}$$

rozhodněte, zda je podpologrupou, případně podmonoidem, případně podgrupou, grupy $(S_{\mathbb{N}}, \circ)$ všech bijektivních transformací množiny přirozených čísel.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $\big((\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot) \times (G, \cdot)\big)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z},\ c \in \mathbb{C} \right\},$$

$$H = \left\{ \left((-1)^{\ell} \cdot \mathrm{e}^{t}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ s + t \cdot \mathrm{i} & 2a + 4k & 1 \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; a, k, \ell \in \mathbb{Z},\ s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $1 + \sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{3} - 1} \cdot \mathrm{i}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4 + 3\alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3 \cdot (\alpha + 2) = 2 \cdot (\alpha - 1)$.

6. (10 bodů) Dejte příklad okruhu, který není tělesem a má právě dva podokruhy, které tělesem jsou.

7. (10 bodů) Dejte příklad grup G a H, které nejsou cyklické a přitom splňují následující podmínky:

- Grupa G není izomorfní žádné podgrupě grupy H.
- Grupa H není izomorfní žádné podgrupě grupy G.
- Každá podgrupa grupy H různá od H je izomorfní nějaké podgrupě grupy G.

8. (5 bodů) Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. (10 bodů) Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.