Algebra I – podzim 2022 – 1. termín

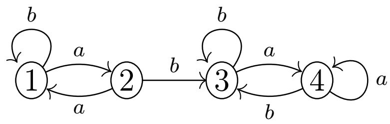
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Určete, pro která přirozená čísla k je množina

$$M_k = \{\, ka + 3b\sqrt[3]{2} + 3c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \,\}$$

podokruhem, případně ideálem, okruhu $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & f & g \\ 0 & p & h \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \mid p \in \{1, -1\},\ f, g, h \in \mathbb{Z}[x],\ f(1) = 2 \cdot h(1) \right\},$$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & f & g \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid f, g, h \in \mathbb{Z}[x],\ f \text{ a } h \text{ mají kořen } 1,\ g(1) \text{ je sudé} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 2$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 + 3\alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(2 - \alpha) = 2\alpha + 2$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad konečné cyklické grupy $(G, \cdot)$ a jejích dvou prvků g a h takových, že množina $\{g, h\}$ generuje G, ale žádný z prvků g a h celé G negeneruje.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad dvou neizomorfních konečných okruhů takových, že ani jeden není tělesem a mají stejný počet prvků a stejnou charakteristiku.

8. **(5 bodů)** Definujte okruh polynomů nad okruhem.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující všechna vložení daného oboru integrity do těles. Co nastává v případě, že je obor integrity konečný?

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý pologrupový homomorfismus mezi dvěma grupami je homomorfismem grupovým. Vycházejte přitom přímo z definic homomorfismů a grupy.