Algebra I – podzim 2022 – 2. termín

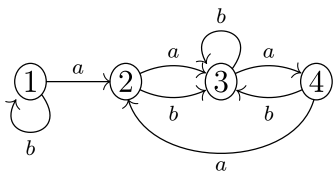
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Pro $m \in \{13, 18\}$ a $n \in \{9, 16\}$ rozhodněte, zda předpis

   $$([a]_m, [2^k]_n) \star ([b]_m, [2^\ell]_n) = ([a + 3^k \cdot b]_m, [2^{k+\ell}]_n), \quad \text{pro } a, b, k, \ell \in \mathbb{Z},\ k \geq 1,\ \ell \geq 1,$$

   korektně definuje na množině $S = \mathbb{Z}_m \times \{\, [2^k]_n \mid k \geq 1 \,\}$ operaci takovou, že $(S, \star)$ je pologrupa.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa

   $$\big((G, \cdot) \times (G, \cdot) \times (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)\big)/H,$$

   kde

   $$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{C}[x] \right\},$$
   $$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & f \\ 0 & p \end{pmatrix}, 1/p \right) \mid p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\},\ f \in \mathbb{C}[x] \text{ má kořen } 1 \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

   $$\frac{1}{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5},$$

   kde α splňuje $\alpha^4 = -3 \cdot (\alpha^2 + \alpha + 2)$, bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad monoidu obsahujícího právě šest neinvertibilních prvků.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu, který má právě čtyři homomorfismy do sebe.

8. **(5 bodů)** Definujte, co se rozumí tím, když se o oboru integrity řekne, že je s jednoznačným rozkladem.

9. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení popisující nerozložitelné polynomy nad $\mathbb{C}$ a nad $\mathbb{R}$.

10. **(10 bodů)** Dokažte, že každý ideál okruhu polynomů nad tělesem je hlavní.