Algebra I – podzim 2022 – 3. termín

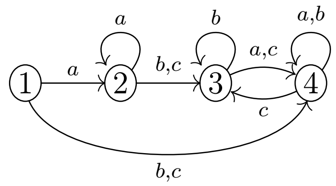
Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Na množině $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ uvažujme binární operace $\oplus$ a $*$ definované předpisy

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d),$$
$$(a,b)*(c,d)=(ac-2bd,ad+bc+2bd).$$

Rozhodněte, zda $(\mathbb{C}\times\mathbb{C},\oplus,*)$ je okruh/obor integrity/těleso.

2. **(10 bodů)** Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G,\cdot)/H$, kde

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&f\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\;\middle|\;a,b\in\mathbb{Z},\;f\in\mathbb{Z}[x]\right\},$$
$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&2c&d\\0&1&4c\\0&0&1\end{pmatrix}\;\middle|\;c,d\in\mathbb{Z}\right\}.$$

4. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $1+\sqrt{3}+\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\mathrm{i}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^4+2\alpha^2+8}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(\alpha+2)=-4\alpha-10$.

6. **(10 bodů)** Dejte příklad okruhu R, který má až na izomorfismus právě osm homomorfních obrazů, a dvou surjektivních homomorfismů $\varphi\colon R\to S$ a $\psi\colon R\to T$ takových, že neexistuje homomorfismus S do T ani homomorfismus T do S.

7. **(10 bodů)** Dejte příklad grupy G a homomorfismů $\varphi,\psi\colon G\to G$, které splňují $\ker(\varphi)=\ker(\psi)$, $\psi(G)\nsubseteq\varphi(G)$ a $\varphi(G)\nsubseteq\psi(G)$.

8. **(5 bodů)** Definujte jednotky a nerozložitelné prvky oboru integrity.

9. **(5 bodů)** Popište vztah mezi rozšířeními těles konečného stupně a rozšířeními těles o algebraické prvky. Tyto pojmy vysvětlete.

10. **(10 bodů)** Přímo z definic dokažte, že každá grupa je izomorfní nějaké grupě permutací.