Algebra I – podzim 2023 – 5. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

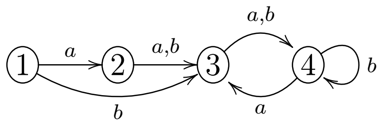
1. (10 bodů) Pro každou z následujících tří podmínek rozhodněte, zda korektně definuje podmnožinu I okruhu $(\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}], +, \cdot)$ a zda tato podmnožina je ideálem tohoto okruhu. Přitom množina I obsahuje číslo $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} + d\sqrt[3]{16}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, právě tehdy, když platí

(a) $[a + b + c]_3 = [d]_3$,

(b) $[a + b + d]_3 = [c]_3$,

(c) $[a + c + d]_3 = [b]_3$.

2. (10 bodů) Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu



3. (15 bodů) Nalezněte součin známých grup, který je izomorfní faktorové grupě $\big((G, \cdot) \times (\mathbb{Z}, +)\big)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ h & g & p \end{pmatrix} \;\middle|\; p \in \{1, -1\},\ f, g \in \mathbb{Z}[x],\ h \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}][x] \right\},$$

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f & 1 & 0 \\ h & g & 1 \end{pmatrix}, f(1) + 2k \right) \in G \times \mathbb{Z} \;\middle|\; k, h(2), h(3) \in \mathbb{Z},\ f(1) + g(1) \text{ je sudé} \right\}.$$

4. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla $\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[4]{8}$ nad $\mathbb{Q}$.

5. (15 bodů) Vyjádřete číslo

$$\frac{1}{\alpha^5 - 2\alpha^4 + \alpha^3 + 3\alpha + 1}$$

bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli, víte-li, že číslo α splňuje rovnost $\alpha^3(2 - \alpha) = 2\alpha + 2$.

6. (10 bodů) Dejte příklad konečného okruhu $(R, +, \cdot)$ takového, že existuje právě $\frac{9}{10}|R|$ prvků $r \in R$ takových, že pro nějaký prvek $s \in R \setminus \{0\}$ platí $r \cdot s = 0$.

7. (10 bodů) Dejte příklad grupy $(G, \cdot)$, která má více než jeden izomorfismus na sebe, a jejích dvou prvků g a h takových, že pro každý izomorfismus $\varphi\colon (G, \cdot) \to (G, \cdot)$ platí $\varphi(g) = g$ a $\varphi(h) = h$.

8. (5 bodů) Definujte podílové těleso oboru integrity.

9. (5 bodů) Formulujte tvrzení o existenci ideálu generovaného danou podmnožinou okruhu, včetně explicitního popisu prvků tohoto ideálu.

10. (10 bodů) Přímo z definice podgrupy dokažte, že levé třídy rozkladu grupy podle podgrupy jsou po dvou disjunktní.