

# Prohledávání stavového prostoru

Aleš Horák

E-mail: [hales@fi.muni.cz](mailto:hales@fi.muni.cz)  
<http://nlp.fi.muni.cz/uui/>

Obsah:

- Prohledávání stavového prostoru
- Neinformované prohledávání
- Informované prohledávání stavového prostoru
- Jak najít dobrou heuristiku?

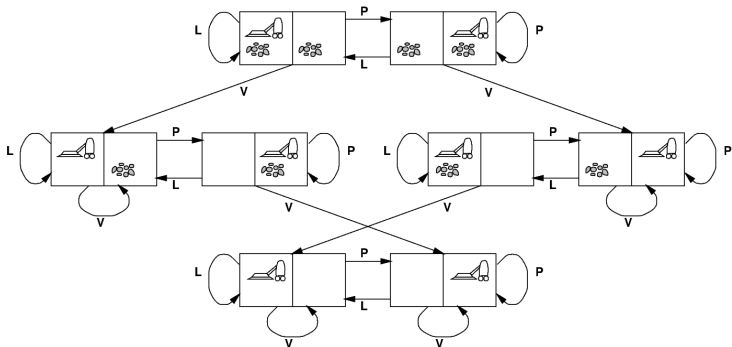
# Prohledávání stavového prostoru

## Řešení problému prohledáváním stavového prostoru:

- **stavový prostor**, předpoklady – statické a deterministické prostředí, diskrétní stavy
- *počáteční stav*                    **problem.init\_state**
- *cílová podmínka*                **problem.is\_goal(State)**
- *přechodové akce*              **problem.moves(State) → NewStates**
- implementace a zpracování výstupů **problem.moves()** určují **prohledávací strategii**



# Problém agenta Vysavače

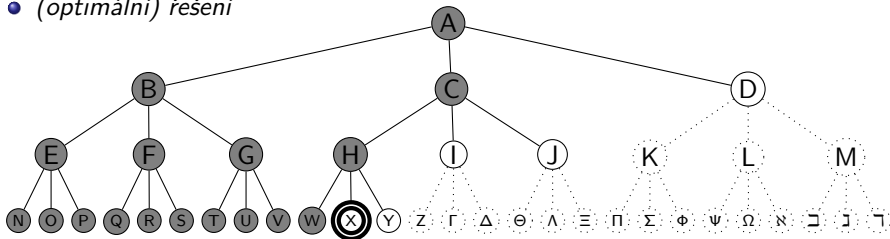


- máme dvě **místnosti** (L, P)
- jeden **vysavač** (v L nebo P)
- v každé místnosti je/není špína
- počet **stavů** je  $2 \times 2^2 = 8$
- **akce** = {doLeva, doPrava, Vysávej}

# Problém agenta Vysavače

## Prohledávací strategie – prohledávací strom:

- kořenový uzel
- uzel prohledávacího stromu:
  - (odkaz na) stav
  - rodičovský uzel
  - přechodová akce
  - hloubka uzlu
  - cena –  $g(n)$  cesty,  $c(x, a, y)$  přechodu
- (optimální) řešení




# Problém agenta Vysavače

## Prohledávací strategie – prohledávací strom:

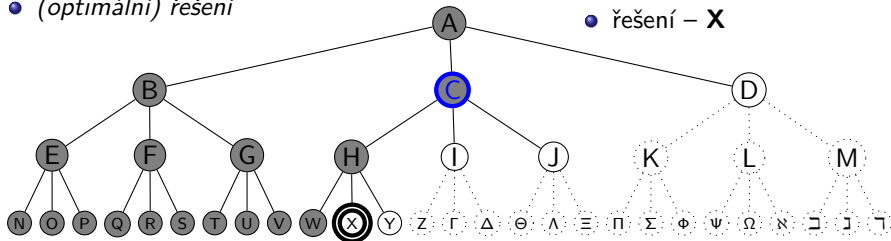
- kořenový uzel
- uzel prohledávacího stromu:
  - (odkaz na) stav
  - rodičovský uzel
  - přechodová akce
  - hloubka uzlu
  - cena –  $g(n)$  cesty,  $c(x, a, y)$  přechodu
- (optimální) řešení

- A** (stav )

- např. uzel **C**:

- stav – 
- rodič – **A**
- akce – **doPrava**
- hloubka – **1**
- cena – **1**

- řešení – **X**



# Řešení problému prohledáváním

Kostra algoritmu:

```
function SEARCH(problem)  
  process ← collection(problem.init_state) # stavy ke zpracování, blíže neurčená kolekce  
  while length(process) > 0 do  
    current_node ← remove_current_node(process)  
    if problem.is_goal(current_node) then print current_node # řešení  
    foreach child ∈ problem.moves(current_node) do  
      process.add_node(child)
```

# Řešení problému prohledáváním

Kostra algoritmu:

```
function SEARCH(problem)  
  process ← collection(problem.init_state) # stavy ke zpracování, blíže neurčená kolekce  
  while length(process) > 0 do  
    current_node ← remove_current_node(process)  
    if problem.is_goal(current_node) then print current_node # řešení  
    foreach child ∈ problem.moves(current_node) do  
      process.add_node(child)
```

rekurzivně včetně cesty k řešení:

```
function RECURSIVESEARCH(problem, path = collection())  
  if length(path) = 0 then  
    return RecursiveSearch(problem, collection(problem.init_state))  
  current_node ← get_current_node(path)  
  if problem.is_goal(current_node) then print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do  
    RecursiveSearch(problem, path.with_node(child)) # cesta rozšířená o child
```

# Prohledávací strategie – vlastnosti

## Porovnání strategií:

- úplnost
- optimálnost
- časová složitost
- prostorová složitost



# Prohledávací strategie – vlastnosti

## Porovnání strategií:

- úplnost
  - optimálnost
  - časová složitost
  - prostorová složitost
- složitost závisí na:
- $b$  – faktor **větvení** (branching factor)
  - $d$  – hloubka **cíle** (goal depth)
  - $m$  – **maximální hloubka** větve/délka cesty (maximum depth/path, může být  $\infty$ ?)

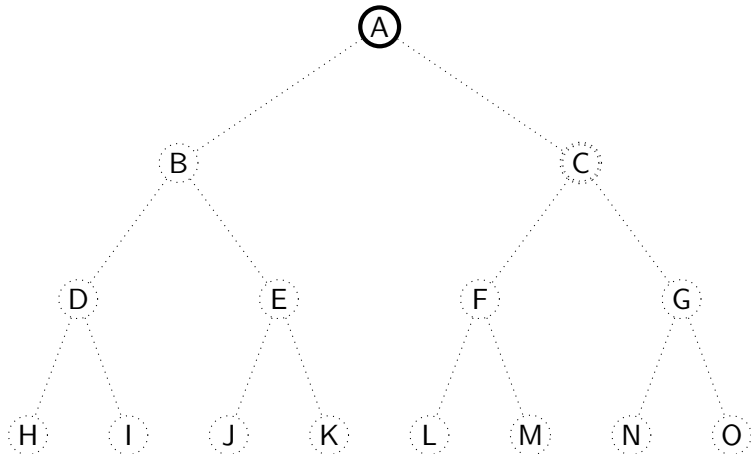
# Neinformované prohledávání

- prohledávání do hloubky
- prohledávání do hloubky s limitem
- prohledávání do šířky
- prohledávání podle ceny
- prohledávání s postupným prohlubováním

poznámka – zde názvy metod označují **prohledávací strategie**, které **nejsou totožné** s odpovídajícími obecnými grafovými algoritmy

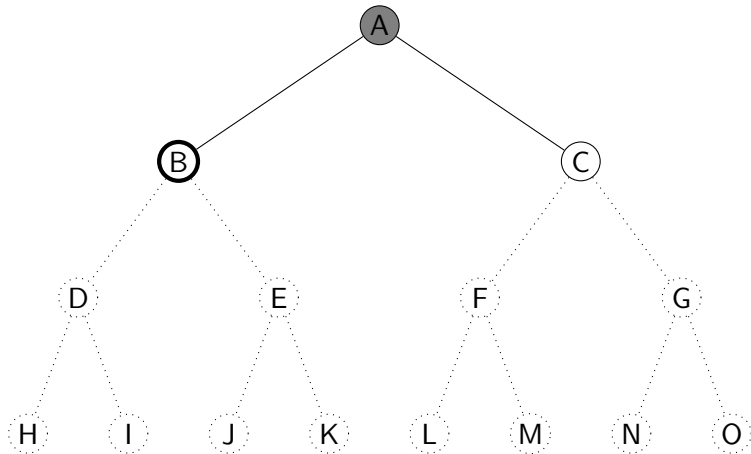
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



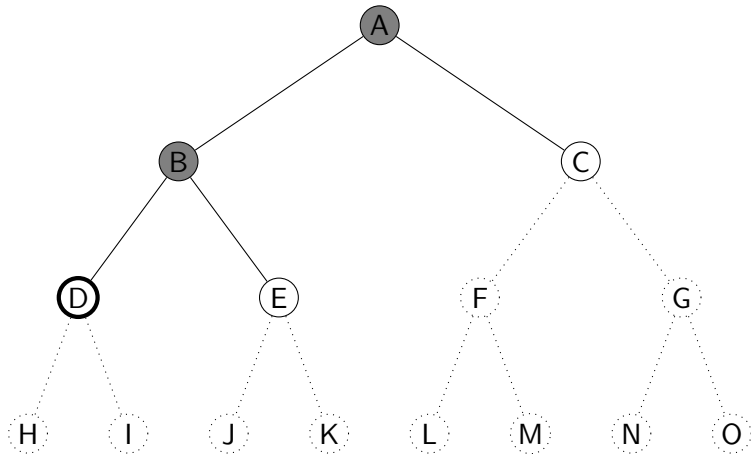
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



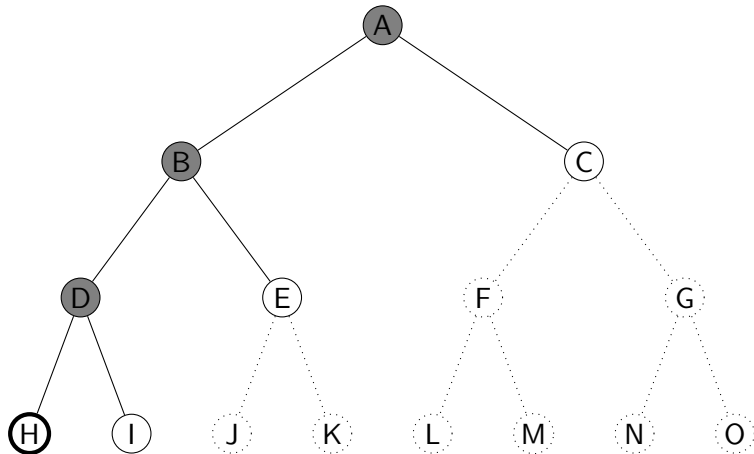
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



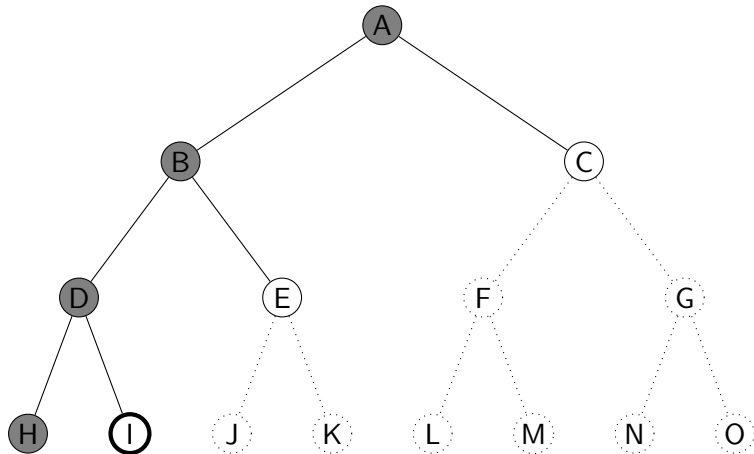
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



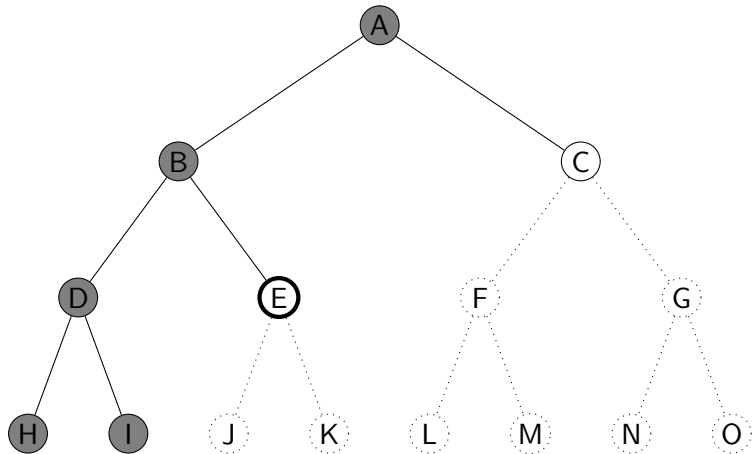
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



# Prohledávání do hloubky

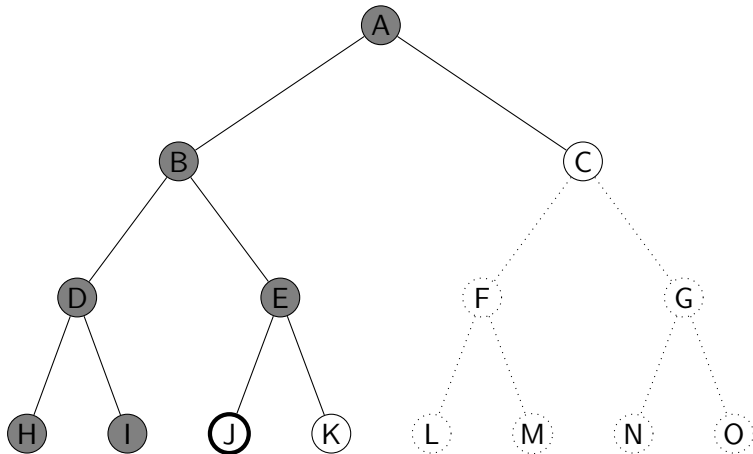
Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)





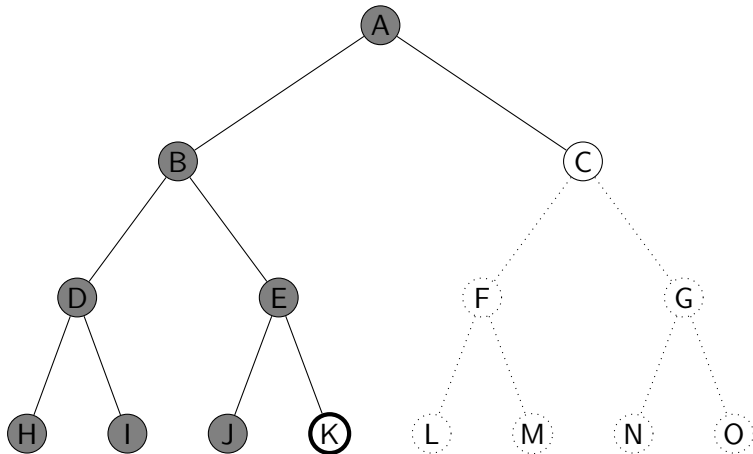
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



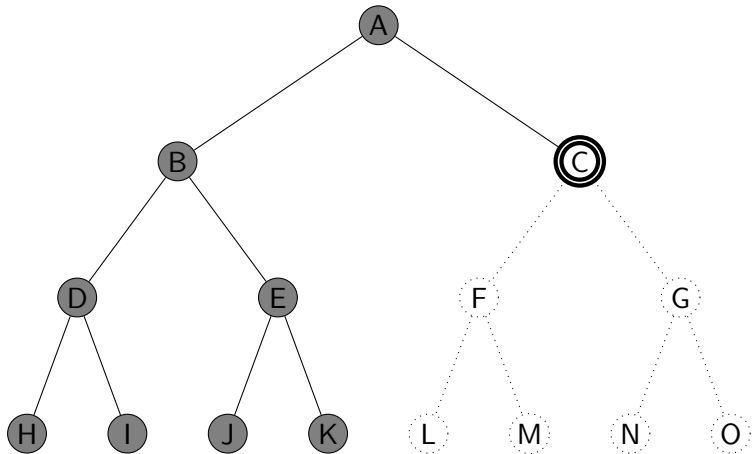
# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



# Prohledávání do hloubky

Prohledává se vždy nejlevější a nejhlubší neexpandovaný uzel (*Depth-first Search, DFS*)



# Prohledávání do hloubky

```
function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])  
  if length(path) = 0 then  
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])  
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty  
  if problem.is_goal(current_node) then  
    print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce  
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
```

# Prohledávání do hloubky

```
function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])  
  if length(path) = 0 then  
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])  
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty  
  if problem.is_goal(current_node) then  
    print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce  
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
```

*úplnost*

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*

# Prohledávání do hloubky

```
function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])  
  if length(path) = 0 then  
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])  
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty  
  if problem.is_goal(current_node) then  
    print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce  
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
```

úplnost                      není úplný (nekonečná větvev, cykly)

optimálnost

časová složitost

prostorová složitost

# Prohledávání do hloubky

```
function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])  
  if length(path) = 0 then  
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])  
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty  
  if problem.is_goal(current_node) then  
    print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce  
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
```

*úplnost*                      **není** úplný (nekonečná větev, cykly)

*optimálnost*                **není** optimální

*časová složitost*

*prostorová složitost*

# Prohledávání do hloubky

```
function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])  
  if length(path) = 0 then  
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])  
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty  
  if problem.is_goal(current_node) then  
    print path # cesta k řešení  
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce  
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
```

úplnost                      není úplný (nekonečná větev, cykly)

optimálnost                není optimální

časová složitost             $O(b^m)$

prostorová složitost



# Prohledávání do hloubky

```

function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])
  if length(path) = 0 then
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty
  if problem.is_goal(current_node) then
    print path # cesta k řešení
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta

```

<i>úplnost</i>	není úplný (nekonečná větev, cykly)
<i>optimálnost</i>	není optimální
<i>časová složitost</i>	$O(b^m)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bm)$ , lineární

# Prohledávání do hloubky

```

function DEPTHFIRSTSEARCH(problem, path ← [])
  if length(path) = 0 then
    return DepthFirstSearch(problem, [problem.init_state])
  current_node ← path.last() # poslední prvek cesty
  if problem.is_goal(current_node) then
    print path # cesta k řešení
  foreach child ∈ problem.moves(current_node) do # možné akce
    if child ∉ path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí
      DepthFirstSearch(problem, path + [child]) # rozšířená cesta
  
```

úplnost                      není úplný (nekonečná větev, cykly)

optimálnost                není optimální

časová složitost          $O(b^m)$

prostorová složitost     $O(bm)$ , lineární

Největší problém – **nekonečná větev** = nenajde se cíl, program neskončí!

# Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití “zarážky” = limit hloubky  $\ell$

# Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití “zarážky” = limit hloubky  $\ell$

konec má dvě možné interpretace – vyčerpání limitu nebo neexistenci (dalšího) řešení

# Prohledávání do hloubky s limitem

Řešení nekonečné větve – použití “zarážky” = limit hloubky  $\ell$

konec má dvě možné interpretace – **vyčerpání limitu** nebo **neexistenci (dalšího) řešení**

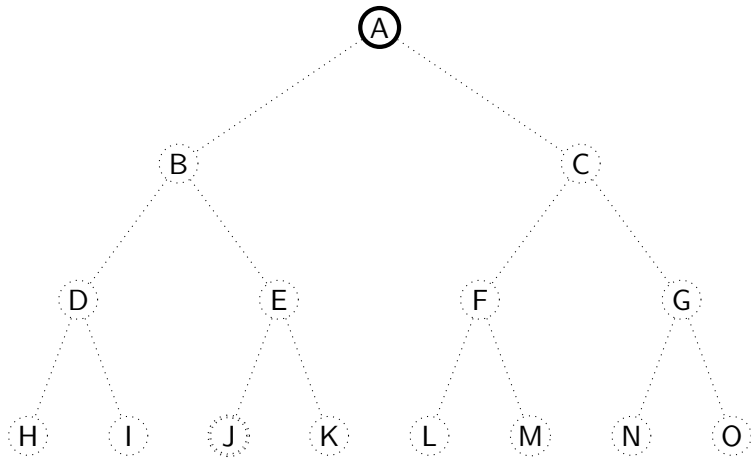
## Vlastnosti:

<i>úplnost</i>	<b>není</b> úplný (pro $\ell < d$ )
<i>optimálnost</i>	<b>není</b> optimální (pro $\ell > d$ )
<i>časová složitost</i>	$O(b^\ell)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(b\ell)$

dobrá volba limitu  $\ell$  – podle znalosti problému

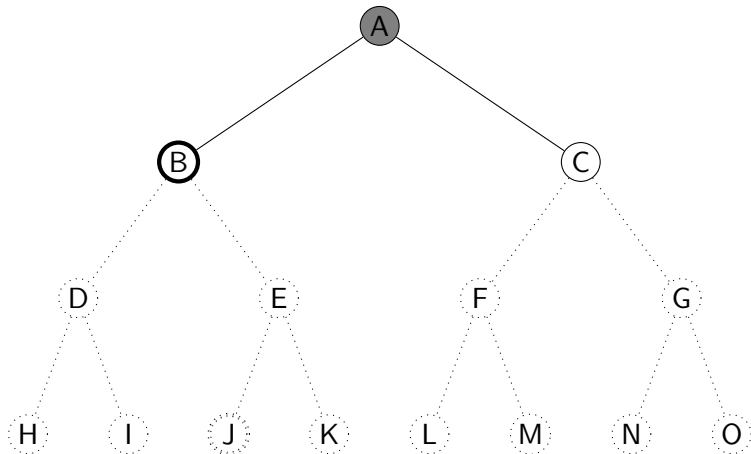
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



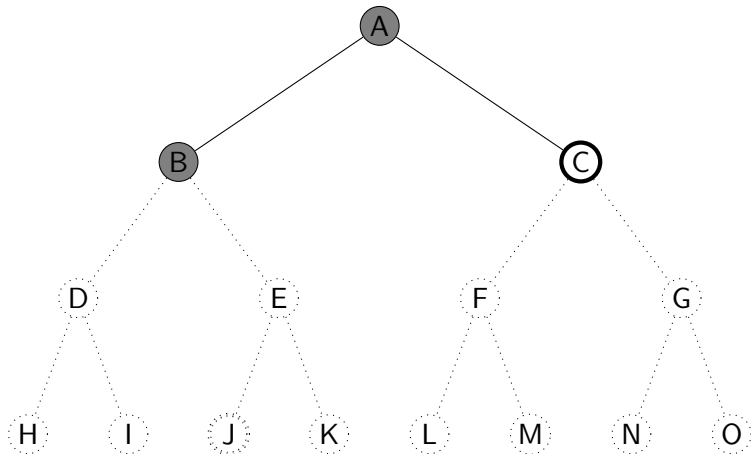
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



# Prohledávání do šířky

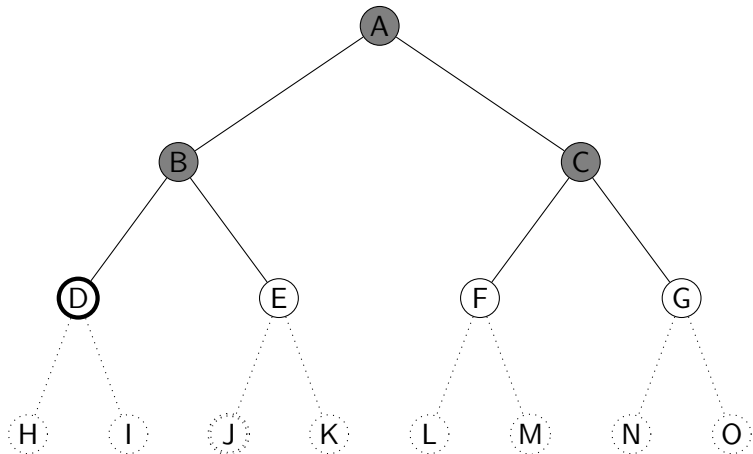
Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)





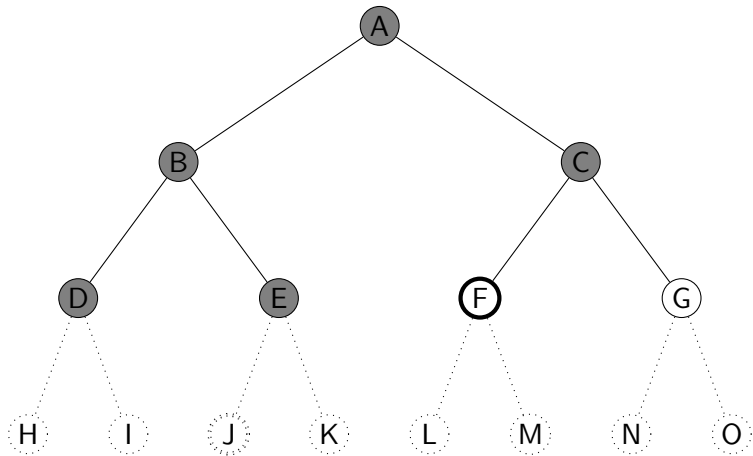
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



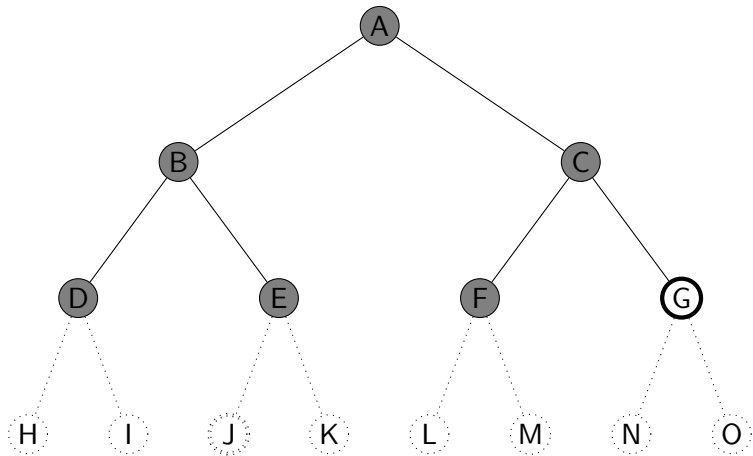
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



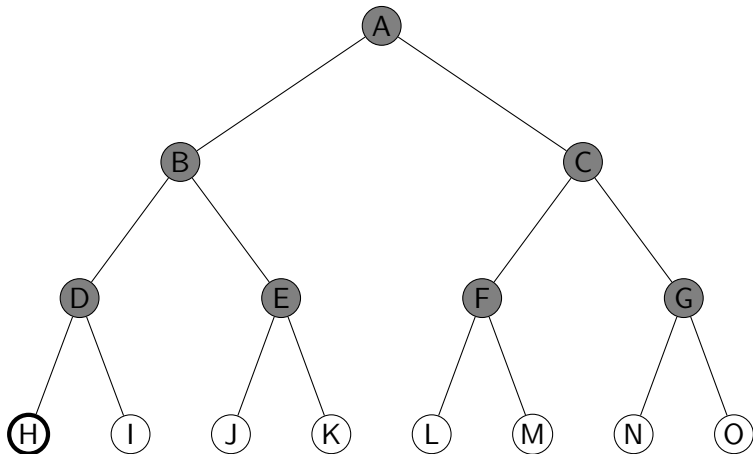
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



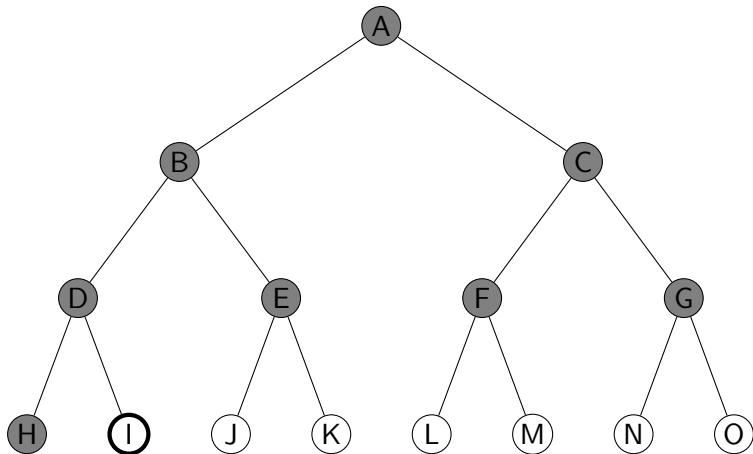
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



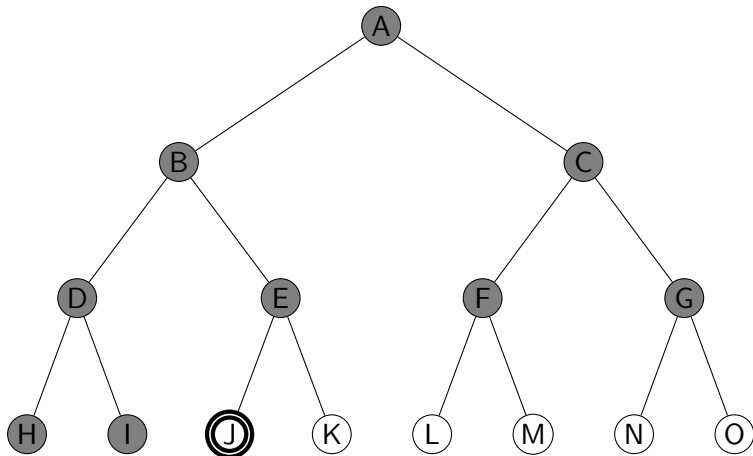
# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



# Prohledávání do šířky

Prohledává se vždy nejlevější neexpandovaný uzel s nejmenší hloubkou.  
(*Breadth-first Search, BFS*)



# Prohledávání do šířky

ve frontě (FIFO) udržuje seznam cest

```
function BREADTHFIRSTSEARCH(problem)  
  process ← [[problem.init_state]] # seznam cest k aktuálnímu uzlu  
  while length(process) > 0 do  
    current_path ← process.first () # aktuální cesta, první v kolekci  
    current_node ← current_path.last() # aktuální uzel, poslední v cestě  
    if problem.is_goal(current_node) then  
      print current_path # vypíše cestu k řešení  
    foreach child ∈ problem.moves(current_node) do  
      if child ∉ current_path then # test cyklu v cestě, obecně být nemusí  
        process ← process + [current_path + [child]] # rozšířený seznam cest
```

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

*úplnost*

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*



# Prohledávání do šířky – vlastnosti

*úplnost* je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

*úplnost*

je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost*

je optimální podle délky cesty/**není** optimální podle obecné ceny

*časová složitost*

*prostorová složitost*

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

*úplnost*

je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost*

je optimální podle délky cesty/**není** optimální podle obecné ceny

*časová složitost*

$1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$ ,  
exponenciální v  $d$

*prostorová složitost*

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

<i>úplnost</i>	je úplný (pro konečné $b$ )
<i>optimálnost</i>	je optimální podle délky cesty/ <b>není</b> optimální podle obecné ceny
<i>časová složitost</i>	$1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$ , exponenciální v $d$
<i>prostorová složitost</i>	$O(b^{d+1})$ (každý uzel v paměti)

# Prohledávání do šířky – vlastnosti

<i>úplnost</i>	je úplný (pro konečné $b$ )
<i>optimálnost</i>	je optimální podle délky cesty/ <b>není</b> optimální podle obecné ceny
<i>časová složitost</i>	$1 + b + b^2 + b^3 + \dots + b^d + b(b^d - 1) = O(b^{d+1})$ , exponenciální v $d$
<i>prostorová složitost</i>	$O(b^{d+1})$ (každý uzel v paměti)

Největší problém – paměť:

Hloubka	Uzlů	Čas	Paměť
2	1100	0.11 sek	1 MB
4	111 100	11 sek	106 MB
6	$10^7$	19 min	10 GB
8	$10^9$	31 hod	1 TB
10	$10^{11}$	129 dnů	101 TB
12	$10^{13}$	35 let	10 PB
14	$10^{15}$	3 523 let	1 EB

Ani čas není dobrý → potřebujeme **informované** strategie prohledávání.

# Prohledávání podle ceny

- BFS je optimální pro rovnoměrně ohodnocené stromy × **prohledávání podle ceny** (**Uniform-cost Search**) je optimální pro **obecné ohodnocení**
- fronta uzlů se udržuje **uspořádaná** podle ceny cesty

# Prohledávání podle ceny

- BFS je optimální pro rovnoměrně ohodnocené stromy × **prohledávání podle ceny** (**Uniform-cost Search**) je optimální pro **obecné ohodnocení**
- fronta uzlů se udržuje **uspořádaná** podle ceny cesty

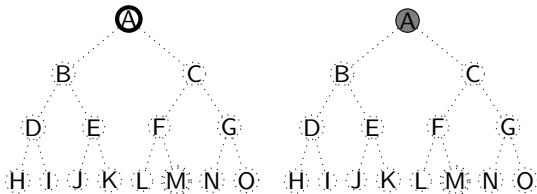
## Vlastnosti:

<i>úplnost</i>	je úplný (pro $\epsilon \geq 0$ a $b$ konečné)
<i>optimálnost</i>	je optimální (pro $g(n)$ rostoucí)
<i>časová složitost</i>	počet uzlů s $g \leq C^*$ , $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$ , kde $C^*$ ... cena optimálního řešení
<i>prostorová složitost</i>	počet uzlů s $g \leq C^*$ , $O(b^{1+\lceil C^*/\epsilon \rceil})$

# Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (**Iterative deepening DFS, IDS**)

limit=0

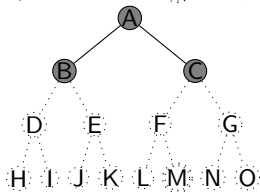
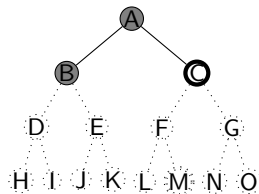
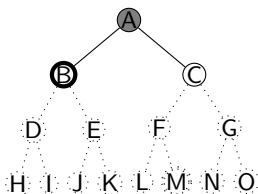
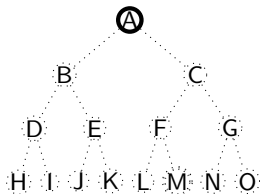




# Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (**Iterative deepening DFS, IDS**)

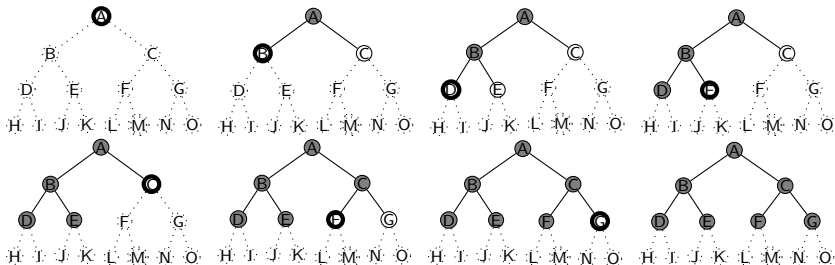
limit=1



# Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (**Iterative deepening DFS, IDS**)

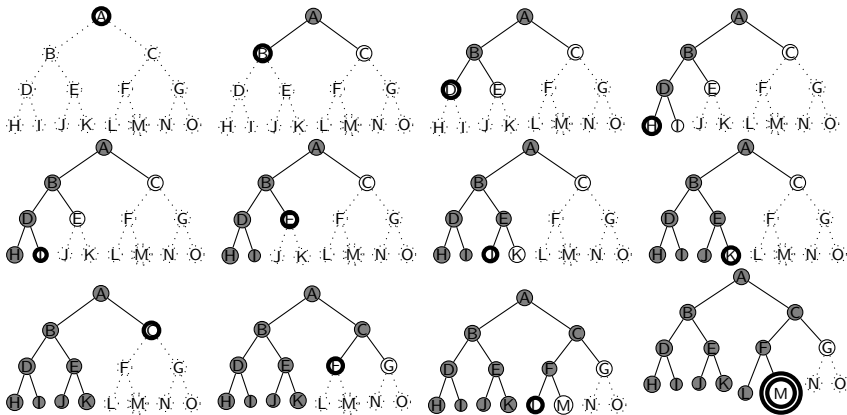
limit=2



# Prohledávání s postupným prohlubováním

prohledávání do hloubky s postupně se **zvyšujícím limitem** (**Iterative deepening DFS, IDS**)

limit=3



# Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

*úplnost* je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost* je optimální (pro  $g(n)$  rovnoměrně neklesající funkce hloubky)

*časová složitost*  $d(b) + (d - 1)b^2 + \dots + 1(b^d) = O(b^d)$

*prostorová složitost*  $O(bd)$

# Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

*úplnost* je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost* je optimální (pro  $g(n)$  rovnoměrně neklesající funkce hloubky)

*časová složitost*  $d(b) + (d - 1)b^2 + \dots + 1(b^d) = O(b^d)$

*prostorová složitost*  $O(bd)$

- kombinuje výhody BFS a DFS:
  - nízké paměťové nároky – lineární
  - optimálnost, úplnost

# Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

<i>úplnost</i>	je úplný (pro konečné $b$ )
<i>optimálnost</i>	je optimální (pro $g(n)$ rovnoměrně neklesající funkce hloubky)
<i>časová složitost</i>	$d(b) + (d - 1)b^2 + \dots + 1(b^d) = O(b^d)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bd)$

- kombinuje výhody BFS a DFS:
  - nízké paměťové nároky – **lineární**
  - **optimálnost, úplnost**
- **zdánlivé plýtvání** opakovaným generováním

ALE **generuje** o jednu úroveň **míň**, např. pro  $b = 10, d = 5$ :

$$N(\text{IDS}) = 50 + 400 + 3\,000 + 20\,000 + 100\,000 = 123\,450$$

$$N(\text{BFS}) = 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + 999\,990 = 1\,111\,100$$

# Prohledávání s postupným prohlubováním – vlastnosti

*úplnost* je úplný (pro konečné  $b$ )

*optimálnost* je optimální (pro  $g(n)$  rovnoměrně neklesající funkce hloubky)

*časová složitost*  $d(b) + (d - 1)b^2 + \dots + 1(b^d) = O(b^d)$

*prostorová složitost*  $O(bd)$

- kombinuje výhody BFS a DFS:

- nízké paměťové nároky – **lineární**
- **optimálnost, úplnost**

- **zdánlivé plýtvání** opakovaným generováním

ALE **generuje** o jednu úroveň **míň**, např. pro  $b = 10, d = 5$ :

$$N(\text{IDS}) = 50 + 400 + 3\,000 + 20\,000 + 100\,000 = 123\,450$$

$$N(\text{BFS}) = 10 + 100 + 1\,000 + 10\,000 + 100\,000 + 999\,990 = 1\,111\,100$$

IDS je **nejvhodnější** neinformovaná strategie pro **velké prostory** a **neznámou hloubku** řešení.

## Shrnutí vlastností algoritmů neinformovaného prohledávání

<i>Vlastnost</i>	<i>do hloubky</i>	<i>do hloubky s limitem</i>	<i>do šířky</i>	<i>podle ceny</i>	<i>s postupným prohlubováním</i>
<i>úplnost</i>	ne	ano, pro $\ell \geq d$	ano*	ano*	ano*
<i>optimálnost</i>	ne	ne	ano*	ano*	ano*
<i>časová složitost</i>	$O(b^m)$	$O(b^\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(b^d)$
<i>prostorová složitost</i>	$O(bm)$	$O(b\ell)$	$O(b^{d+1})$	$O(b^{1+\lfloor C^*/\epsilon \rfloor})$	$O(bd)$



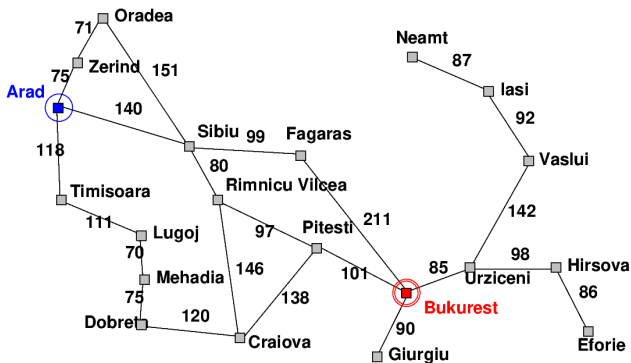


# Obsah

- 1 Prohledávání stavového prostoru
  - Řešení problému prohledáváním
  - Prohledávací strategie
- 2 Neinformované prohledávání
  - Prohledávání do hloubky
  - Prohledávání do hloubky s limitem
  - Prohledávání do šířky
  - Prohledávání podle ceny
  - Prohledávání s postupným prohlubováním
- 3 Informované prohledávání stavového prostoru
  - Hladové heuristické hledání
  - Hledání nejlepší cesty – algoritmus  $A^*$
- 4 Jak najít dobrou heuristiku?
  - Jak najít přípustnou heuristickou funkci?
  - Určení kvality heuristiky

# Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města **Arad** do města **Bukurest**



# Příklad – schéma rumunských měst

Města:

Arad

**Bukurest**

Craiova

Dobreta

Eforie

Fagaras

Giurgiu

Hirsova

Iasi

Lugoj

Mehadia

Neamt

...

Cesty:

Arad ↔ Timisoara 118

Arad ↔ Sibiu 140

Arad ↔ Zerind 75

Timisoara ↔ Lugoj 111

Sibiu ↔ Fagaras 99

Sibiu ↔ Rimnicu Vilcea 80

Zerind ↔ Oradea 71

... ↔ ...

Giurgiu ↔ **Bukurest** 90

Pitesti ↔ **Bukurest** 101

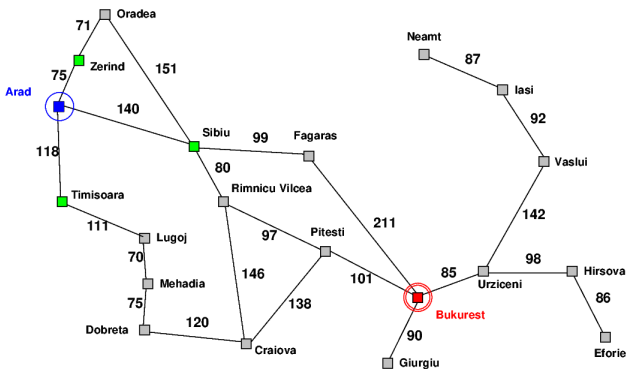
Fagaras ↔ **Bukurest** 211

Urziceni ↔ **Bukurest** 85

# Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města **Arad** do města **Bukurest**

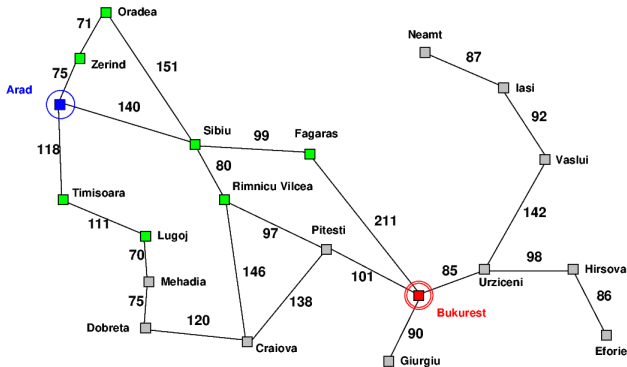
výběr uzlů pomocí **BFS**:



# Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města **Arad** do města **Bukurest**

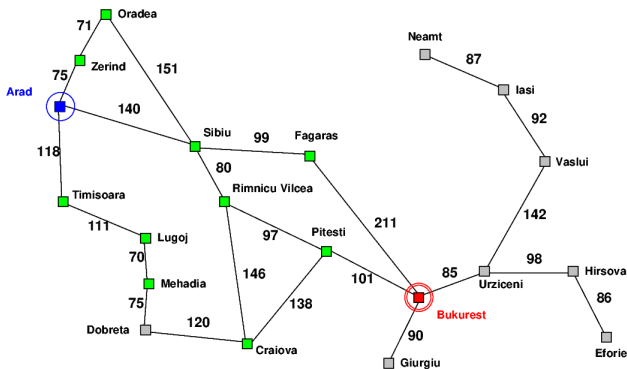
výběr uzlů pomocí **BFS**:



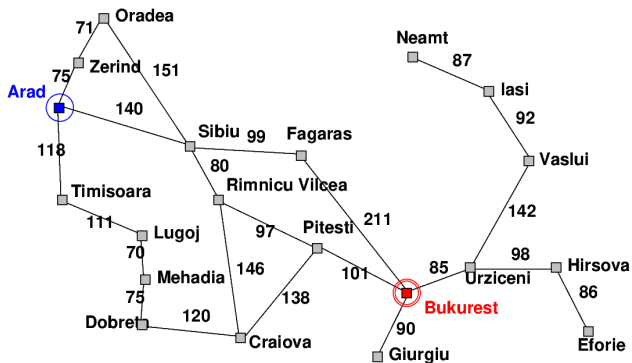
# Příklad – cesta na mapě

Najdi cestu z města **Arad** do města **Bukurest**

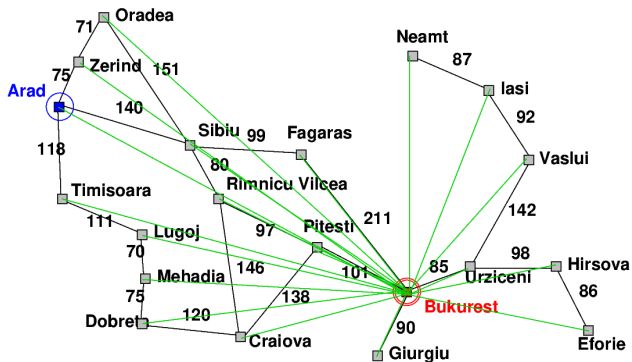
výběr uzlů pomocí **BFS**:



# Příklad – schéma rumunských měst



# Příklad – schéma rumunských měst

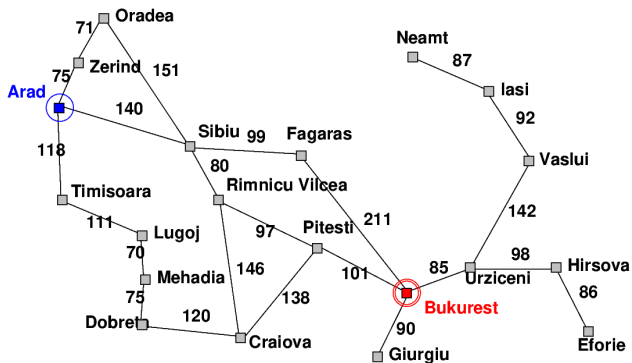


Arad	366
<b>Bukurest</b>	<b>0</b>
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	176
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	100
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374





## Příklad – schéma rumunských měst



Arad	366
<b>Bukurest</b>	<b>0</b>
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	176
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	100
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374



# Příklad – cesta na mapě

## Neinformované prohledávání:

- DFS, BFS a varianty
- nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – **slepé prohledávání**
- zná pouze:
  - počáteční/cílový stav
  - přechodovou funkci

# Příklad – cesta na mapě

## Neinformované prohledávání:

- DFS, BFS a varianty
- nemá (téměř) žádné informace o pozici cíle – **slepé prohledávání**
- zná pouze:
  - počáteční/cílový stav
  - přechodovou funkci

## Informované prohledávání:

má navíc informaci o (odhadu) blízkosti stavu k cílovému stavu – **heuristická funkce** (heuristika)

# Heuristické hledání nejlepší cesty

- Best-first Search (obecný, varianty podle ohodnocovací funkce)
- použití **ohodnocovací funkce**  $f(n)$  pro každý uzel – výpočet **přínosu** daného uzlu (stavu)
- udržujeme seznam uzlů **uspořádaný** (vzestupně) vzhledem k  $f(n)$
- použití **heuristické funkce**  $h(n)$  pro každý uzel – **odhad vzdálenosti** daného uzlu (stavu) od cíle
- čím **menší**  $h(n)$ , tím **blíže** k cíli,  $h(\text{Goal}) = 0$ .
- nejjednodušší varianta –  
**hladové heuristické hledání**, *Greedy best-first search*  
 $f(n) = h(n)$

# Hladové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce  $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$ , **přímá vzdálenost** z  $n$  do Bukuresti

Arad

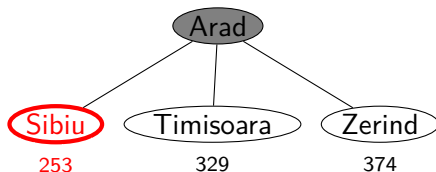
366



# Hledové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

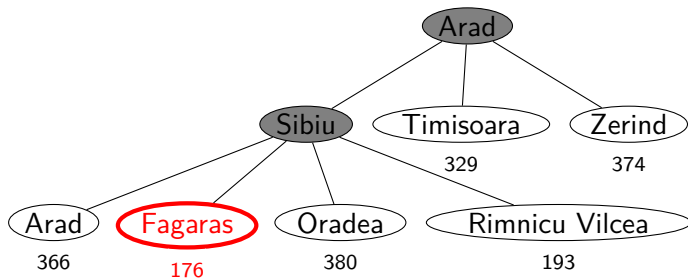
ohodnocovací funkce  $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$ , **přímá vzdálenost** z  $n$  do Bukuresti



# Hladové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

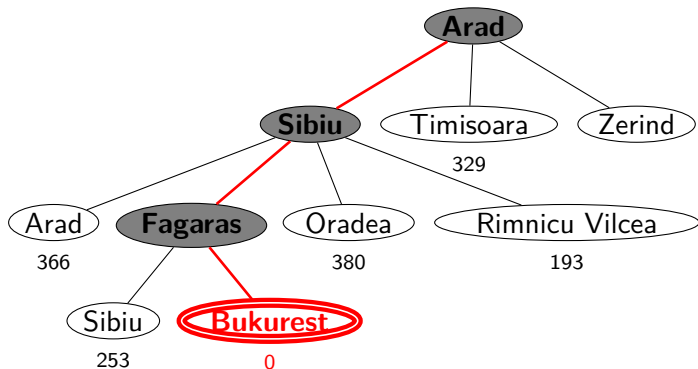
ohodnocovací funkce  $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$ , **přímá vzdálenost** z  $n$  do Bukuresti



# Hladové heuristické hledání – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce  $f(n) = h(n) = h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$ , **přímá vzdálenost** z  $n$  do Bukuresti





# Hladové heuristické hledání – vlastnosti

- expanduje vždy uzel, který **se zdá** nejbližší k cíli
- cesta nalezená v příkladu ( $g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{Fagaras} \rightarrow \text{Bukurest}) = 450$ ) je sice úspěšná, ale **není optimální**  
( $g(\text{Arad} \rightarrow \text{Sibiu} \rightarrow \text{RimnicuVilcea} \rightarrow \text{Pitesti} \rightarrow \text{Bukurest}) = 418$ )
- *úplnost*  
*optimálnost*  
*časová složitost*  
*prostorová složitost*









# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\*

- některé zdroje označují tuto variantu jako **Best-first Search**
- **ohodnocovací funkce** – kombinace  $g(n)$  a  $h(n)$ :

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$g(n)$  je **cena cesty** do  $n$

$h(n)$  je **odhad ceny** cesty z  $n$  do cíle

$f(n)$  je **odhad ceny nejlevnější cesty**, která vede přes  $n$

# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\*

- některé zdroje označují tuto variantu jako **Best-first Search**
- **ohodnocovací funkce** – kombinace  $g(n)$  a  $h(n)$ :

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

$g(n)$  je **cena cesty** do  $n$

$h(n)$  je **odhad ceny** cesty z  $n$  do cíle

$f(n)$  je **odhad ceny nejlevnější cesty**, která vede přes  $n$

- A\* algoritmus vyžaduje tzv. **přípustnou** (*admissible*) heuristiku:

$$0 \leq h(n) \leq h^*(n), \text{ kde } h^*(n) \text{ je skutečná cena cesty z } n \text{ do cíle}$$

tj. odhad se volí vždycky **kratší** nebo roven ceně libovolné **možné** cesty do cíle

Např. přímá vzdálenost  $h_{\text{vzd\_Buk}}$  nikdy není delší než (jakákoliv) cesta

# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$

Arad

$$366=0+366$$

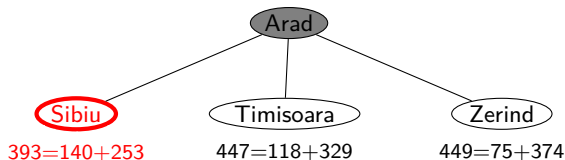




# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

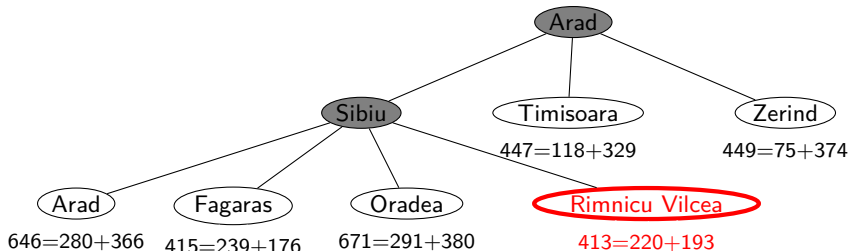
ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

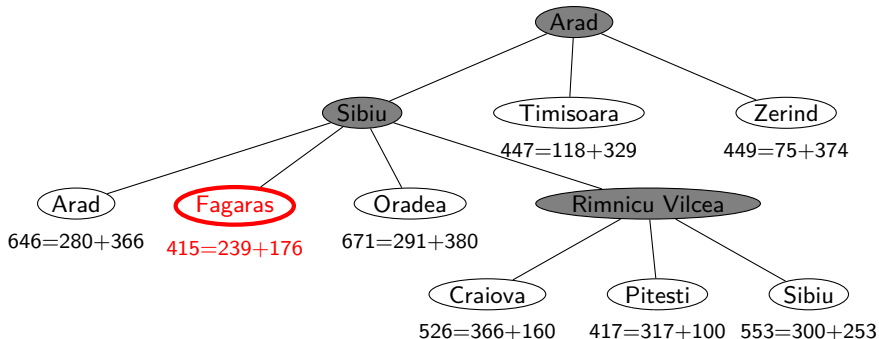
ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

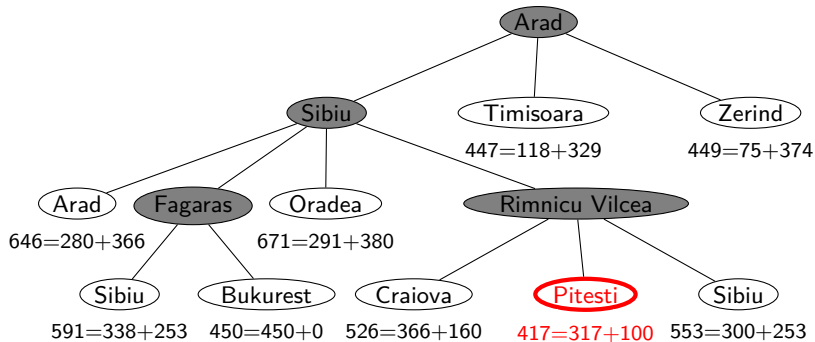
ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

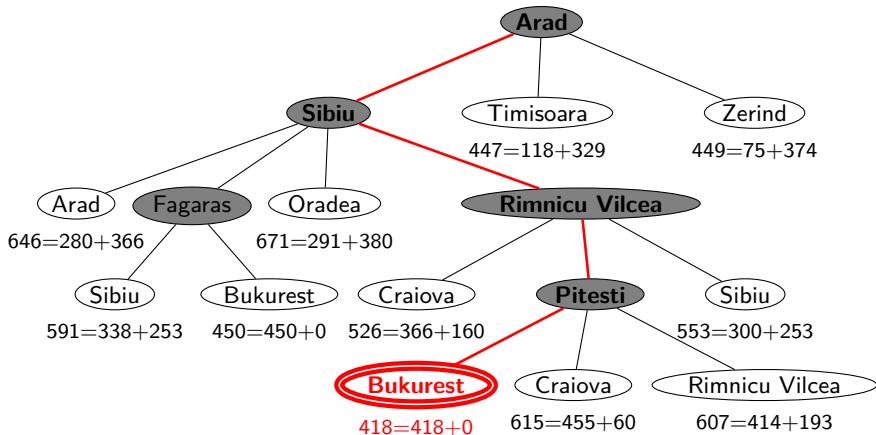
ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



# Heuristické hledání A\* – příklad

Hledání cesty z města *Arad* do města *Bukurest*

ohodnocovací funkce  $f(n) = g(n) + h(n) = g(n) + h_{\text{vzd\_Buk}}(n)$



# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - A\* expanduje **všechny** uzly s  $f(n) < C^*$
  - A\* expanduje **některé** uzly s  $f(n) = C^*$
  - A\* **neexpanduje žádné** uzly s  $f(n) > C^*$

- *úplnost*

*optimálnost*

*časová složitost*

*prostorová složitost*

# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
    - A\* expanduje všechny uzly s  $f(n) < C^*$
    - A\* expanduje některé uzly s  $f(n) = C^*$
    - A\* neexpanduje žádné uzly s  $f(n) > C^*$
  - úplnost je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)
- optimálnost*
- časová složitost*
- prostorová složitost*

# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - A\* expanduje všechny uzly s  $f(n) < C^*$
  - A\* expanduje některé uzly s  $f(n) = C^*$
  - A\* neexpanduje žádné uzly s  $f(n) > C^*$
- úplnost je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)
- optimálnost je optimální
- časová složitost
- prostorová složitost



# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - A\* expanduje **všechny** uzly s  $f(n) < C^*$
  - A\* expanduje **některé** uzly s  $f(n) = C^*$
  - A\* **neexpanduje žádné** uzly s  $f(n) > C^*$
- *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)
- optimálnost* je optimální
- časová složitost*  $O((b^*)^d)$ , exponenciální v délce řešení  $d$   
 $b^*$  ... tzv. *efektivní faktor větvení*, viz dále
- prostorová složitost*

# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - A\* expanduje **všechny** uzly s  $f(n) < C^*$
  - A\* expanduje **některé** uzly s  $f(n) = C^*$
  - A\* **neexpanduje žádné** uzly s  $f(n) > C^*$
- *úplnost* je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)
- optimálnost* je optimální
- časová složitost*  $O((b^*)^d)$ , exponenciální v délce řešení  $d$   
 $b^*$  ... tzv. *efektivní faktor větvení*, viz dále
- prostorová složitost*  $O((b^*)^d)$ , každý uzel v paměti

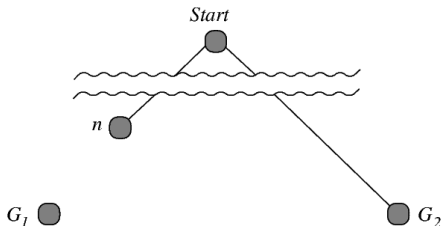
# Hledání nejlepší cesty A\* – vlastnosti

- expanduje uzly podle  $f(n) = g(n) + h(n)$ 
  - A\* expanduje všechny uzly s  $f(n) < C^*$
  - A\* expanduje některé uzly s  $f(n) = C^*$
  - A\* neexpanduje žádné uzly s  $f(n) > C^*$
- úplnost je úplný (pokud [počet uzlů s  $f < C^*$ ]  $\neq \infty$ , tedy cena  $\geq \epsilon$  a  $b$  konečné)
- optimálnost je optimální
- časová složitost  $O((b^*)^d)$ , exponenciální v délce řešení  $d$   
 $b^*$  ... tzv. *efektivní faktor větvení*, viz dále
- prostorová složitost  $O((b^*)^d)$ , každý uzel v paměti

Problém s prostorovou složitostí řeší algoritmy jako *IDA\**, *RBFS*

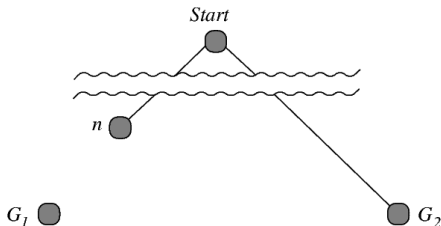
# Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)



# Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)

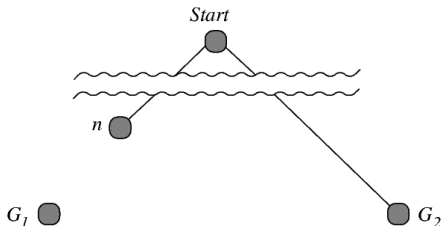


Pak

$$f(G_2) = g(G_2) \quad \text{protože} \quad h(G_2) = 0$$

# Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)

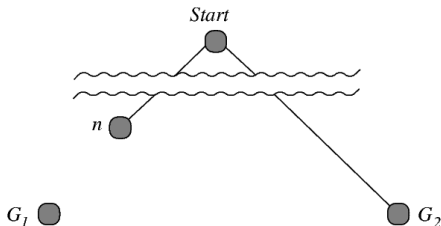


Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) \quad \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) \quad \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální}
 \end{aligned}$$

# Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)

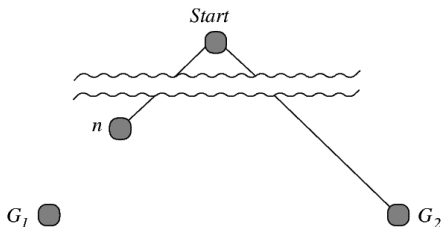


Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) && \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) && \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\
 &\geq f(n) && \text{protože } h \text{ je přípustná}
 \end{aligned}$$

# Důkaz optimálnosti algoritmu A\*

- předpokládejme, že byl vygenerován nějaký **suboptimální cíl**  $G_2$  a je uložen ve frontě.
- dále necht'  $n$  je **neexpandovaný** uzel na nejkratší cestě k **optimálnímu cíli**  $G_1$  (tj. **chybně neexpandovaný** uzel ve správném řešení)



Pak

$$\begin{aligned}
 f(G_2) &= g(G_2) \quad \text{protože } h(G_2) = 0 \\
 &> g(G_1) \quad \text{protože } G_2 \text{ je suboptimální} \\
 &\geq f(n) \quad \text{protože } h \text{ je přípustná}
 \end{aligned}$$

tedy  $f(G_2) > f(n) \Rightarrow A^*$  nikdy nevybere  $G_2$  pro expanzi dřív než expanduje  $n \rightarrow$  **spor** s předpokladem, že  $n$  je *neexpandovaný uzel* □



# Hledání nejlepší cesty – algoritmus A\*

řešení pomocí **prioritní fronty**

```

function A*SEARCH(problem)
  process_heap ← [(0, 0, [problem.init_state])] # prioritní fronta podle f
  while length(process_heap) > 0 do
    f, g, current_path ← process_heap.heap_pop() # nejmenší f-hodnota
    current_node ← current_path.last()
    if problem.is_goal(current_node) then
      print current_path # vypíše cestu k řešení
    foreach child, cost ∈ problem.moves(current_node) do
      if child ∉ current_path then # detekce cyklů, obecně být nemusí
        process_heap.heap_add( (g+cost+h(child),
                               g+cost,
                               current_path + [child]))

```

f-hodnota, g-hodnota a cesta k aktuálnímu uzlu

# Příklad – řešení posunovačky

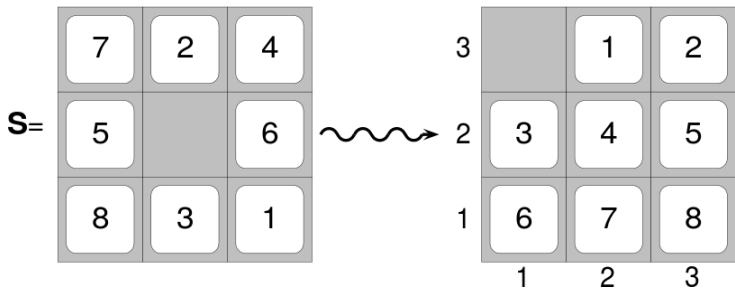
konfigurace = seznam souřadnic  $(x, y)$ : [pozice<sub>díry</sub>, pozice<sub>kámen č.1</sub>, ...]

```
8p.init_state ← [(2,2), (3,1), (2,3), (2,1),
(3,3), (1,2), (3,2), (1,3), (1,1)]
```

```
function 8P.IS_GOAL(S)
return S = [(1,3), (2,3), (3,3), (1,2),
(2,2), (3,2), (1,1), (2,1), (3,1)]
```

**function** 8P.MOVES(state):

- 2 až 4 možnosti – pohyb mezery
- cena vždy 1



# Příklad – řešení posunovačky pokrač.

Volba přípustné heuristické funkce  $h$ :

# Příklad – řešení posunovačky pokrač.

Volba přípustné heuristické funkce  $h$ :

- $h_1(n)$  = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě      $h_1(\mathbf{S}) = 8$

## Příklad – řešení posunovačky pokrač.

### Volba přípustné heuristické funkce $h$ :

- $h_1(n)$  = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě  $h_1(\mathbf{S}) = 8$
- $h_2(n)$  = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic  $h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$

# Příklad – řešení posunovačky pokrač.

## Volba přípustné heuristické funkce $h$ :

- $h_1(n)$  = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě  $h_1(\mathbf{S}) = 8$
- $h_2(n)$  = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic  $h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$

$h_1$  i  $h_2$  jsou přípustné ...  $h^*(S) = 26$

## Příklad – řešení posunovačky pokrač.

Volba přípustné heuristické funkce  $h$ :

- $h_1(n)$  = počet dlaždiček, které nejsou na svém místě  $h_1(\mathbf{S}) = 8$
- $h_2(n)$  = součet **manhattanských vzdáleností** dlaždic od svých správných pozic  $h_2(\mathbf{S}) = 3_7 + 1_2 + 2_4 + 2_5 + 3_6 + 2_8 + 2_3 + 3_1 = 18$

$h_1$  i  $h_2$  jsou přípustné ...  $h^*(S) = 26$

## A\*Search(8p):

```

[[ (2,2), (3,1), (2,3), (2,1), (3,3), (1,2), (3,2), (1,3), (1,1) ],
 [ (1,2), (3,1), (2,3), (2,1), (3,3), (2,2), (3,2), (1,3), (1,1) ],
 ...
 [ (1,2), (2,3), (3,3), (1,3), (2,2), (3,2), (1,1), (2,1), (3,1) ],
 [ (1,3), (2,3), (3,3), (1,2), (2,2), (3,2), (1,1), (2,1), (3,1) ] ]

```

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak objevit heuristiku  $h_1$  nebo  $h_2$ ?



# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém  
*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*  
**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o 1 pole (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o **1 pole** (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B
- (b) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  B je prázdná
- (c) dlaždice se může přesunout z A na B

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o 1 pole (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\dots h_2$
- (b) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  B je prázdná
- (c) dlaždice se může přesunout z A na B

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o 1 pole (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\dots h_2$
- (b) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  B je prázdná
- (c) dlaždice se může přesunout z A na B  $\dots h_1$

# Jak najít přípustnou heuristickou funkci?

- je možné najít obecné pravidlo, jak **objevit heuristiku**  $h_1$  nebo  $h_2$ ?
- $h_1$  i  $h_2$  jsou délky cest pro **zjednodušené verze** problému Posunovačka:
  - při **přenášení** dlaždice kamkoliv –  $h_1$ =počet kroků nejkratšího řešení
  - při **posouvání** dlaždice kamkoliv o 1 pole (i na plné) –  $h_2$ =počet kroků nejkratšího řešení
- **relaxovaný problém** – méně omezení na akce než původní problém

*Cena optimálního řešení **relaxovaného problému** je přípustná heuristika pro původní problém.*

**optimální** řešení **původního** problému = **řešení** relaxovaného problému

Posunovačka a relaxovaná posunovačka:

- dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B  $\wedge$  B je prázdná
- (a) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  A sousedí s B ...  $h_2$
- (b) dlaždice se může přesunout z A na B  $\Leftrightarrow$  B je prázdná ... Gaschnigova h.
- (c) dlaždice se může přesunout z A na B .....  $h_1$

# Určení kvality heuristiky

**efektivní faktor větvení  $b^*$**  –  $N$ ... počet vygenerovaných uzlů,  $d$ ... hloubka řešení, idealizovaný strom s  $N + 1$  uzly má faktor větvení  $b^*$  (reálné číslo):

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když  $A^*$  najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ...  $b^* = 1.92$   
heuristika je tím **lepší**, čím **blíže** je  $b^*$  **hodnotě 1**.



# Určení kvality heuristiky

**efektivní faktor větvení  $b^*$**  –  $N$ ... počet vygenerovaných uzlů,  $d$ ... hloubka řešení, idealizovaný strom s  $N + 1$  uzly má faktor větvení  $b^*$  (reálné číslo):

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když A\* najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ...  $b^* = 1.92$   
heuristika je tím **lepší**, čím **blíže** je  $b^*$  **hodnotě 1**.

☞ **měření  $b^*$**  na množině testovacích sad – dobrá představa o **přínosu heuristiky**

## 8-posunovačka

$d$	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení $b^*$		
	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

# Určení kvality heuristiky

**efektivní faktor větvení  $b^*$**  –  $N$ ... počet vygenerovaných uzlů,  $d$ ... hloubka řešení, idealizovaný strom s  $N + 1$  uzly má faktor větvení  $b^*$  (reálné číslo):

$$N + 1 = 1 + b^* + (b^*)^2 + \dots + (b^*)^d$$

např.: když  $A^*$  najde řešení po 52 uzlech v hloubce 5 ...  $b^* = 1.92$   
heuristika je tím **lepší**, čím **blíže** je  $b^*$  **hodnotě 1**.

☞ **měření  $b^*$**  na množině testovacích sad – dobrá představa o **přínosu heuristiky**

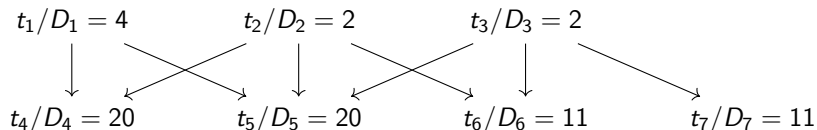
## 8-posunovačka

$d$	Průměrný počet uzlů			Efektivní faktor větvení $b^*$		
	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$	IDS	$A^*(h_1)$	$A^*(h_2)$
2	10	6	6	2.45	1.79	1.79
6	680	20	18	2.73	1.34	1.30
10	47127	93	39	2.79	1.38	1.22
12	3644035	227	73	2.78	1.42	1.24
18	–	3056	363	–	1.46	1.26
24	–	39135	1641	–	1.48	1.26

$h_2$  **dominuje**  $h_1$  ( $\forall n : h_2(n) \geq h_1(n)$ ) ...  $h_2$  je **lepší** (nebo stejná) než  $h_1$  ve všech případech

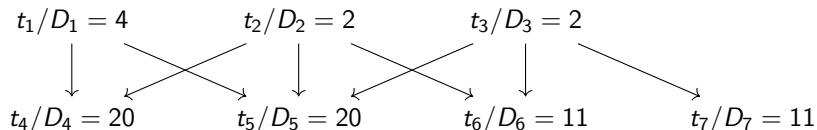
# Příklad – rozvrh práce procesorů

- úlohy  $t_i$  s potřebným časem na zpracování  $D_i$  (např.:  $i = 1, \dots, 7$ )
- $m$  procesorů (např.:  $m = 3$ )
- relace **precedence** mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



# Příklad – rozvrh práce procesorů

- úlohy  $t_i$  s potřebným časem na zpracování  $D_i$  (např.:  $i = 1, \dots, 7$ )
- $m$  procesorů (např.:  $m = 3$ )
- relace **precedence** mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy

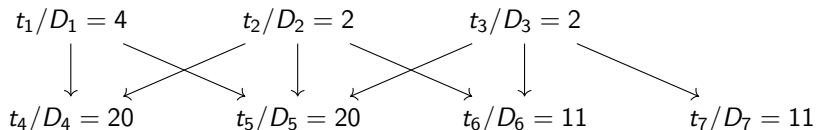


- problém: najít **rozvrh práce** pro každý procesor s minimalizací celkového času

	02	4	13	24	33
CPU <sub>1</sub>	$t_3$	$\leftarrow t_6 \rightarrow$	$\leftarrow t_5 \rightarrow$		
CPU <sub>2</sub>	$t_2$	$\leftarrow t_7 \rightarrow$	.....		
CPU <sub>3</sub>	$t_1$	$\leftarrow t_4 \rightarrow$	.....		

# Příklad – rozvrh práce procesorů

- úlohy  $t_i$  s potřebným časem na zpracování  $D_i$  (např.:  $i = 1, \dots, 7$ )
- $m$  procesorů (např.:  $m = 3$ )
- relace **precedence** mezi úlohami – které úlohy mohou začít až po skončení dané úlohy



- problém: najít **rozvrh práce** pro každý procesor s minimalizací celkového času

	02	4	13	24	33
CPU <sub>1</sub>	$t_3 \leftarrow t_6 \Rightarrow$		$\leftarrow t_5 \Rightarrow$		
CPU <sub>2</sub>	$t_2 \leftarrow t_7 \Rightarrow$		.....		
CPU <sub>3</sub>	$t_1 \Rightarrow$		$\leftarrow t_4 \Rightarrow$		.....

	02	4	13	24	33
CPU <sub>1</sub>	$t_3 \leftarrow t_6 \Rightarrow$		$\leftarrow t_7 \Rightarrow$		.....
CPU <sub>2</sub>	$t_2 \leftarrow$		$\leftarrow t_5 \Rightarrow$		.....
CPU <sub>3</sub>	$t_1 \Rightarrow$		$\leftarrow t_4 \Rightarrow$		.....

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- stavy: (**nezařazené\_úlohy**, **běžící\_úlohy**, **čas\_ukončení**)

př.:  $([(Waiting_{T_1, D_1}), (Waiting_{T_2, D_2}), \dots], [(Task_1, F_1), (Task_2, F_2), (Task_3, F_3)], FinTime)$

**běžící\_úlohy** udržujeme setříděné  $F_1 \leq F_2 \leq F_3$

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- stavy: (**nezařazené\_úlohy**, **běžící\_úlohy**, **čas\_ukončení**)  
př.:  $([(Waiting_{T_1, D_1}), (Waiting_{T_2, D_2}), \dots], [(Task_1, F_1), (Task_2, F_2), (Task_3, F_3)], FinTime)$   
**běžící\_úlohy** udržujeme setříděné  $F_1 \leq F_2 \leq F_3$
- počáteční uzel:

```
proc. init_state ← (("t1",4), ("t2",2), ("t3",2), ("t4",20), ("t5",20), ("t6",11),  
                    ("t7",11)], ["idle",0), ("idle",0), ("idle",0)], 0)
```

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- stavy: (**nezařazené\_úlohy**, **běžící\_úlohy**, **čas\_ukončení**)  
 př.:  $([(Waiting_{T_1}, D_1), (Waiting_{T_2}, D_2), \dots], [(Task_1, F_1), (Task_2, F_2), (Task_3, F_3)], FinTime)$   
**běžící\_úlohy** udržujeme setříděné  $F_1 \leq F_2 \leq F_3$

- počáteční uzel:

```
proc. init_state ← ((("t1",4), ("t2",2), ("t3",2), ("t4",20), ("t5",20), ("t6",11),
                    ("t7",11)), [("idle",0), ("idle",0), ("idle",0)], 0)
```

- přechodová funkce **proc.moves(Stav)** → **nové stavy s cenami**:

```
function PROC.MOVES (state)
    waiting, active, fintime ← state
    moves ← []
    for task ∈ waiting do # kontrolujem přednost v nezařazených a nedokončených
        if not check_precedence_waiting(task, waiting.without(task)) then next
        if not check_precedence_active(task, active) then next
        newactive, newfintime ← active.replace_first_and_sort(task)
        moves.append((waiting.without(task), newactive, newfintime))
    moves ← moves + insert_idle(waiting, active, fintime) # čekání na procesor
    return moves
```



# Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- stavy: (**nezařazené\_úlohy**, **běžící\_úlohy**, **čas\_ukončení**)  
 př.:  $([(WaitingT_1, D_1), (WaitingT_2, D_2), \dots], [(Task_1, F_1), (Task_2, F_2), (Task_3, F_3)], FinTime)$   
**běžící\_úlohy** udržujeme setříděné  $F_1 \leq F_2 \leq F_3$

- počáteční uzel:

```
proc. init_state ← ([("t1",4), ("t2",2), ("t3",2), ("t4",20), ("t5",20), ("t6",11),
                    ("t7",11)], [{"idle",0}, {"idle",0}, {"idle",0}], 0)
```

- přechodová funkce **proc.moves(Stav)** → **nové stavy s cenami**:

```
function PROC.MOVES (state)
    waiting, active, fintime ← state
    moves ← []
    for task ∈ waiting do # kontrolujem přednost v nezařazených a nedokončených
        if not check_precedence_waiting(task, waiting.without(task)) then next
        if not check_precedence_active(task, active) then next
        newactive, newfintime ← active.replace_first_and_sort(task)
        moves.append((waiting.without(task), newactive, newfintime))
    moves ← moves + insert_idle(waiting, active, fintime) # čekání na procesor
    return moves
```

- cílová podmínka

```
function PROC.IS_GOAL (state)
    return length(state[1]) = 0 # žádné nezařazené
```

# Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- heuristika

# Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- heuristika

optimální (nedosažitelný) čas:

$$\mathbf{Finall} = \frac{\sum_i D_i + \sum_j F_j}{m}$$

skutečný (průběžný) čas výpočtu:

$$\mathbf{Fin} = \max(F_j)$$

# Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

- heuristika

optimální (nedosažitelný) čas:

skutečný (průběžný) čas výpočtu:

$$\mathbf{Finall} = \frac{\sum_i D_i + \sum_j F_j}{m}$$

$$\mathbf{Fin} = \max(F_j)$$

**heuristická funkce**

$$h = \begin{cases} \mathbf{Finall} - \mathbf{Fin}, & \text{když } \mathbf{Finall} > \mathbf{Fin} \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

```
function PROC.H (state)
```

```
tasks, processors, fintime ← state
```

```
total_task_time ←  $\Sigma\_task\_time(tasks)$  # čas potřebný ke zpracování čekajících úloh
```

```
total_proc_time ←  $\Sigma\_proc\_time(processors)$  # aktuálně naplánovaný čas všech procesorů
```

```
finall ← (total_task_time + total_proc_time)/length(processors)
```

```
if finall > fintime then
```

```
    return finall - fintime # odhad času pro zpracování čekajících úloh v plánu
```

```
return 0
```

## Příklad – rozvrh práce procesorů – pokrač.

**A\*Search(proc):**

```
[
  [(t1,4),(t2,2),(t3,2),(t4,20),(t5,20),(t6,11),(t7,11)], [(idle,0),(idle,0),(idle,0)], 0),
  [(t1,4),(t2,2),(t4,20),(t5,20),(t6,11),(t7,11)], [(idle,0),(idle,0),(t3,2)], 2),
  [(t1,4),(t4,20),(t5,20),(t6,11),(t7,11)], [(idle,0),(t2,2),(t3,2)], 2),
  [(t4,20),(t5,20),(t6,11),(t7,11)], [(t2,2),(t3,2),(t1,4)], 4),
  [(t4,20),(t5,20),(t6,11)], [(t3,2),(t1,4),(t7,13)], 13),
  [(t4,20),(t5,20),(t6,11)], [(idle,4),(t1,4),(t7,13)], 13),
  [(t5,20),(t6,11)], [(t1,4),(t7,13),(t4,24)], 24),
  [(t6,11)], [(t7,13),(t5,24),(t4,24)], 24),
  [], [(t6,24),(t5,24),(t4,24)], 24) ]
```