Predikátová logika prvního řádu

Aleš Horák

E-mail: hales@fi.muni.cz
http://nlp.fi.muni.cz/uui/

Obsah:

Připomínka – průběžná písemka

- termín – příští **pondělí 4. listopadu**, **20:00**, D1 a D3
- náhradní termín: pro nemocné s omluvenkou, požádejte e-mailem
- nepřihlašuje se – vaši posluchárnu najdete v ISu u termínu zkoušky
- test obsahuje 7 otázek, 6 za 3 body a 1 za 2 body, celkem max 20 bodů za nesprávnou odpověď se 0.5 bodu odečítá.
- celkový čas na vypracování testu je 40 minut.
- nejsou povoleny žádné materiály, ani prázdné papíry. Otázky nesmíte jakýmkoliv způsobem předávat nebo šířit.
- příklady (formou testu – odpovědi A, B, C, ...) z látky probrané na prvních pěti přednáškách

Výhody a nevýhody výrokové logiky

- ☺ výroková logika je deklarativní: syntaxe přímo koresponduje s fakty
- ☺ výroková logika umožňuje zpracovávat částečné/disjunktivní/negované informace (což je víc, než umí většina datových struktur a databází)
- ☺ výroková logika je kompoziční:
  význam $P_1 \wedge P_2$ *je odvozen z významu* P_1 *a* P_2
- ☺ ve výrokové logice je význam kontextově nezávislý
- ☹ výroková logika má velice omezenou expresivitu (narozdíl od přirozeného jazyka)
  např. nemáme jak říct "Jámy způsobují Vánek ve vedlejších místnostech" jinak, než vyjmenovat odpovídající výrok pro každé pole

Výhody a nevýhody přirozeného jazyka

- většina lidí jazyk běžně používá k vyjádření myšlenek a k vyvozování závěrů
- v jazyce umíme vyjádřit (nebo aspoň popsat) téměř všechny myšlenky – má velkou expresivitu
- jazyk je spíš prostředek komunikace než (jen) reprezentace
  např. Podívej!   (*... nad střechou se objevil Superman*)
  věta bez daného kontextu nemusí nést (stejnou) informaci
- jazyk má velkou víceznačnost (*ambiguity*)
  viz matka, zaječí, travička, ...
- lidé si pamatují obsah, ale ne přesnou formu
- konkrétní forma přitom ovlivňuje vyvozování
  Jakou rychlostí jela auta než nastal kontakt? vs ... než se o sebe roztřískala?

Predikátová logika prvního řádu

- **First-order predicate logic**, FOPL/PL1
- vyšší expresivita než výroková logika, nižší složitost než přirozený jazyk
- umožňuje strukturovat jednoduché výroky

PJ: Každý člověk je smrtelný a Sokrates je člověk, proto Sokrates je smrtelný.	VL: $(\check{C} \wedge So) \not\Rightarrow Sm$	PL1: $(\forall x\ \text{čl}(x) \Rightarrow \text{sm}(x) \wedge \text{čl}(\text{So})) \Rightarrow \text{sm}(\text{So})$

- výroková logika $\rightarrow$ svět (ontologie) obsahuje fakty $\times$ PL1 předpokládá, že svět obsahuje:
  - objekty – lidi, domy, teorie, barvy, roky, ...
  - relace – červený, kulatý, prvočíselný, bratři, větší než, uvnitř, ...
  - funkce – otec někoho, nejlepší přítel, plus jedna, začátek čeho, ...

Jedna plus dva rovná se tři: objekty jedna, dva, tři, jedna plus dva; relace rovná se; funkce plus

Pozice vedle Wumpuse zapáchají: objekty pozice, Wumpus; relace zapáchat, vedle

Syntaxe predikátové logiky

Syntaxe predikátové logiky

- **základní prvky** –

konstanty	KingJohn, 2, RichardTheLionheart, ...
funktory predikátů	Brother, $>$, ...
funkce	Sqrt, LeftLegOf, ...
proměnné	x, y, a, b, ...
spojky	$\land \quad \lor \quad \neg \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$
rovnost	$=$
kvantifikátory	$\forall \ \exists$

výroková logika:
S → A | C
A → `True` | `False` | P | Q | R | ...
C → (S) | ¬S
| S ∧ S | S ∨ S
| S ⇒ S | S ⇔ S

- **atomické formule** –

predikáty Brother(KingJohn, RichardTheLionheart)

složené termy $>\Big(\mathrm{Length}\big(\mathrm{LeftLegOf}(\mathrm{Richard})\big), \mathrm{Length}\big(\mathrm{LeftLegOf}(\mathrm{KingJohn})\big)\Big)$

- **složené formule** – z atomických formulí pomocí spojek a kvantifikátorů

$$\neg S, \quad S_1 \land S_2, \quad S_1 \lor S_2, \quad S_1 \Rightarrow S_2, \quad S_1 \Leftrightarrow S_2, \quad \forall x\ P(x), \quad \exists x\ P(x)$$

např. Sibling(KingJohn, Richard) $\Rightarrow$ Sibling(Richard, KingJohn)

$>(1,2) \lor \leq(1,2)$

$>(1,2) \land \neg>(1,2)$

Sémantika predikátové logiky

pravdivost formule se určuje vzhledem k *modelu* a *interpretaci*

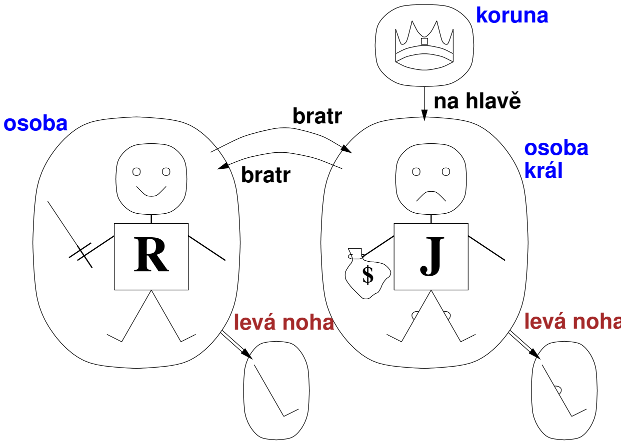
model obsahuje ≥ 1 objektů a relace mezi nimi

objekty modelu se označují jako doména modelu

interpretace definuje vztah mezi syntaxí a modelem – určuje referenty pro:

konstantní symboly $\rightarrow$ *objekty*
predikátové symboly $\rightarrow$ *relace*
funkční symboly $\rightarrow$ *funkce*

Příklad modelu a interpretace ve FOPL



5 objektů, 2 binární relace, 3 unární relace (osoba, král, koruna) a 1 unární funkce (levá noha).

Sémantika predikátové logiky

- konstanty reprezentují jména objektů (individuí)
- proměnné zastupují jména objektů, jejich hodnoty se mohou měnit
- funkce reprezentují složená jména objektů
  např. $add(1,2)$ ($add(2,1)$, $add(0,3)$, ...) jsou složená jména pro konstantu 3
- poznámka: konstanty jsou nulární funkce
- **term** = výraz složený pouze z funkčních symbolů, konstant a proměnných
  $add(x, mul(y, sub(x,y), 1), z)$
- termy vyjadřují aplikaci funkce na argumenty, hodnoty jsou objekty

atomická **formule** **predikát(term$_1$, ..., term$_n$)** je **pravdivá**

$\Leftrightarrow$ *objekty* odkazované pomocí **term**$_1$, ..., **term**$_n$ jsou v *relaci* pojmenované funktorem **predikát**

Předpoklad uzavřeného světa

2 užitečné předpoklady ve spojení s bází znalostí:

- **předpoklad uzavřeného světa** (*closed world assumption*)
  - cokoliv o čem nevíme, že je pravda $\rightarrow$ bereme za dané, že je to nepravda
  - využitý např. v Prologu (negace jako neúspěch)
- **předpoklad jednoznačných pojmenování** (*unique names assumption*)
  - různá jména označují různé objekty

Vázaný a volný výskyt proměnných

- podformule formule A je libovolná spojitá část A, která je sama formulí
  $\exists x((\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y))$ má podformule:
  $\exists x((\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y))$, $(\forall y P(z)) \Rightarrow R(x,y)$, $\forall y P(z)$, $R(x,y)$, $P(z)$
- výskyt proměnné x ve formuli A je vázaný, je x v A v dosahu svého kvantifikátoru
- výskyt proměnné je volný, není-li vázaný

např. výskyt x v předchozí formuli je vázaný
proměnné y a z jsou volné

Univerzální kvantifikace

$\forall\langle$***proměnné***$\rangle$ $\langle$***formule***$\rangle$

"Každý na FI MU je inteligentní:" $\forall x\ \mathrm{Na}(x, \mathrm{FI\ MU}) \Rightarrow \mathrm{inteligentní}(x)$

$\forall x\ P$ je pravdivé v modelu m $\Leftrightarrow$ P je pravdivá pro $x =$ každý možný objekt z modelu m

zhruba odpovídá konjunkci instanciací P

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathrm{Na}(\mathrm{Petr}, \mathrm{FI\ MU}) \Rightarrow \mathrm{inteligentní}(\mathrm{Petr}) \\
\wedge & \mathrm{Na}(\mathrm{Honza}, \mathrm{FI\ MU}) \Rightarrow \mathrm{inteligentní}(\mathrm{Honza}) \\
\wedge & \mathrm{Na}(\mathrm{FI\ MU}, \mathrm{FI\ MU}) \Rightarrow \mathrm{inteligentní}(\mathrm{FI\ MU}) \\
\wedge & \ldots
\end{array}
$$

Existenční kvantifikace

$\exists\langle$***proměnné***$\rangle$ $\langle$***formule***$\rangle$

"Někdo na MFF UK je inteligentní:" $\exists x\ \mathrm{Na}(x, \mathrm{MFF\ UK}) \land \mathrm{inteligentní}(x)$

$\exists x\ P$ je pravdivé v modelu m $\Leftrightarrow$ P je pravdivá pro $x =$ nějaký objekt z modelu m

zhruba odpovídá disjunkci instanciací P

$$\begin{array}{ll} & \mathrm{Na}(\mathrm{Petr}, \mathrm{MFF\ UK}) \land \mathrm{inteligentní}(\mathrm{Petr}) \\ \lor & \mathrm{Na}(\mathrm{Honza}, \mathrm{MFF\ UK}) \land \mathrm{inteligentní}(\mathrm{Honza}) \\ \lor & \mathrm{Na}(\mathrm{MFF\ UK}, \mathrm{MFF\ UK}) \land \mathrm{inteligentní}(\mathrm{MFF\ UK}) \\ \lor & \ldots \end{array}$$

Vlastnosti kvantifikací

- pozor při použití kvantifikátorů na záměnu $\wedge$ a $\Rightarrow$:

	dobře	*špatně*	znamenalo by
"každý P je Q"	$\forall x\ P \Rightarrow Q$	$\forall x\ P \wedge Q$	"každý je P i Q"
"někdo P je Q"	$\exists x\ (P \wedge Q)$	$\exists x\ (P \Rightarrow Q)$	"někdo není P nebo je Q"

- $\forall x \forall y$ je stejné jako $\forall y \forall x$
  $\exists x \exists y$ je stejné jako $\exists y \exists x$
  $\exists x \forall y$ **není** stejné jako $\forall y \exists x$
  $\exists x \forall y$ $má\_rád(x, y)$ – "Existuje osoba, která má ráda všechny lidi na světě."
  $\forall y \exists x$ $má\_rád(x, y)$ – "Každého na světě má alespoň jedna osoba ráda." (potenciálně každého jiná)
- dualita kvantifikátorů
  oba mohou být vyjádřeny pomocí druhého

$$\forall x\ má\_rád(x, zmrzlina) \equiv \neg\exists x\ \neg má\_rád(x, zmrzlina)$$
$$\exists x\ má\_rád(x, mrkev) \equiv \neg\forall x\ \neg má\_rád(x, mrkev)$$

Substituce proměnných

- **substituce** $\sigma = \{x/add(2,1), y/4\}$ definuje dosazení za volné proměnné
- pro větu S a substituci σ – $S\sigma$ označuje výsledek aplikace σ na S:

$$\begin{aligned} S &= \text{chytřejší}(x, y) \\ \sigma &= \{x/\text{Petr}, y/\text{Honza}\} \\ S\sigma &= \text{chytřejší}(\text{Petr}, \text{Honza}) \end{aligned}$$

- term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli A $\Leftrightarrow$ nedochází ke kolizi volných proměnných v t a vázaných proměnných v A

$$\begin{aligned} S &= \exists x P(x, y) \\ S\{y/z\} &= \exists x P(x, z) \\ S\{y/f(z,z)\} &= \exists x P(x, f(z,z)) \\ \textbf{nelze}\ S\{y/f(x,x)\} &= \exists x P(x, f(x,x)) \text{ kvůli změně vazby } x \end{aligned}$$

- kolizi lze řešit přejmenováním volných proměnných v termu t

Konjunktivní normální forma (CNF) v PL1

CNF v PL1 – prenexová (kvantifikátory na začátku) a Skolemova NF (bez $\exists$)

Algoritmus pro **převod** každé PL1 formule do CNF:

1. převedeme implikace na disjunkce: $P \Rightarrow Q \quad \rightarrow \quad \neg P \vee Q$
2. přesuneme $\neg$ dovnitř k literálům: $\neg \forall x\, P \quad \rightarrow \quad \exists x\, \neg P$
3. přejmenujeme proměnné: $\forall x\, P \vee \exists x\, Q \quad \rightarrow \quad \forall x\, P \vee \exists y\, Q$
4. přesuneme kvantifikátory doleva: $\forall x\, P \vee \exists y\, Q \quad \rightarrow \quad \forall x \exists y\, P \vee Q$
5. eliminujeme $\exists$ pomocí Skolemizace:
   $\exists x\, P(x) \quad \rightarrow \quad P(c_1)$
   $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists y\, Q(y) \quad \rightarrow \quad \forall x\, P(x) \Rightarrow Q(f(x))$
6. “zahodíme” univerzální kvantifikátory
7. roznásobíme $\wedge$ pomocí $\vee$: $(P \wedge Q) \vee R \quad \rightarrow \quad (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

Konjunktivní normální forma (CNF) v PL1 – příklad

$\forall x \exists y \neg(P(x,y) \Rightarrow \forall z R(y)) \vee \neg\exists x Q(x)$

$\forall x \exists y \neg(\neg P(x,y) \vee \forall z R(y)) \vee \neg\exists x Q(x)$	($\Rightarrow$ na $\vee$)
$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge \exists z \neg R(y)) \vee \forall x \neg Q(x)$	(přesun negace 3$\times$)
$\forall x_1 \exists y (P(x_1,y) \wedge \exists z \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2)$	(přejmenování x)
$\forall x_1 \exists y \exists z (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \forall x_2 \neg Q(x_2)$	(posun $\exists z$ doleva)
$\forall x_1 \exists y \exists z \forall x_2 (P(x_1,y) \wedge \neg R(y)) \vee \neg Q(x_2)$	(posun $\forall x_2$ doleva)
$\forall x_1 \forall x_2 (P(x_1,f_1(x_1)) \wedge \neg R(f_1(x_1))) \vee \neg Q(x_2)$	(Skolemizace y a z)
$(P(x_1,f_1(x_1)) \wedge \neg R(f_1(x_1))) \vee \neg Q(x_2)$	(odstranění $\forall$)
$(\underline{P(x_1,f_1(x_1))} \vee \underline{\neg Q(x_2)}) \wedge (\underline{\neg R(f_1(x_1))} \vee \underline{\neg Q(x_2)})$	(roznásobení $\wedge$)

Báze znalostí v PL1

předpokládejme, že agent ve Wumpusově jeskyni cítí Zápach a Vánek, ale nevidí Třpyt, nenarazil do zdi a nezabil Wumpuse v čase $t = 5$:

```
 tell (KB, percept([zápach, vánek, nic, nic, nic], 5)).
?- ask(KB,action(A,5)).      % ∃A action(A,5) ?
```

tj. dotaz "Vyplývá nějaká akce z KB v čase $t = 5$?"
odpověď: $true, \{a/\text{Výstřel}\}$ $\leftarrow$ substituce (hodnot proměnným)

$\textsc{Ask}(KB, S)$ vrací některá/všechna σ takové, že $KB \models S\sigma$

Báze znalostí pro Wumpusovu jeskyni v PL1

Vnímání:

$\forall v, tr, n, w, t\ \ Percept([Zápach, v, tr, n, w], t) \Rightarrow Je\_zápach(t)$

$\forall z, v, n, w, t\ \ Percept([z, v, Třpyt, n, w], t) \Rightarrow Máme\_zlato(t)$

Reflex:

$\forall t\ \ Máme\_zlato(t) \Rightarrow Action(Zvednutí, t)$

Reflex s vnitřním stavem: neměli jsme už zlato?

$\forall t\ \ Máme\_zlato(t) \wedge \neg Držím(Zlato, t) \Rightarrow Action(Zvednutí, t)$

Držím(Zlato, t) není pozorovatelné $\Rightarrow$ je důležité držet si informace o vnitřních stavech (např. Mám_šíp(t))

Báze znalostí pro Wumpusovu jeskyni pokrač.

Vyvozování skrytých skutečností:

- vlastnosti pozice:
  $\forall x, t\ \mathit{Na\_poli}(\mathit{Agent}, x, t) \wedge \mathit{Je\_zápach}(t) \Rightarrow \mathit{Zapáchá}(x)$
  $\forall x, t\ \mathit{Na\_poli}(\mathit{Agent}, x, t) \wedge \mathit{Je\_vánek}(t) \Rightarrow \mathit{S\_vánkem}(x)$
- "V poli vedle Jámy je Vánek:"
  - diagnostické pravidlo – odvodí příčiny z následku
    $\forall y\ \mathit{S\_vánkem}(y) \Rightarrow \exists x\ \mathit{Jáma}(x) \wedge \mathit{Vedle}(x, y)$
  - příčinné pravidlo – odvodí výsledek z premisy
    $\forall x, y\ \mathit{Jáma}(x) \wedge \mathit{Vedle}(x, y) \Rightarrow \mathit{S\_vánkem}(y)$
  - ani jedno z nich není úplné
    např. příčinné pravidlo neříká, jestli v poli daleko od Jámy nemůže být Vánek
  - **definice** vztahu Vánku a Jámy:
    $\forall y\ \mathit{S\_vánkem}(y) \Leftrightarrow [\exists x\ \mathit{Jáma}(x) \wedge \mathit{Vedle}(x, y)]$

Báze znalostí pro Wumpusovu jeskyni – rozhodování

- počáteční podmínka v *KB*:
  $Na\_poli(Agent, [1,1], S_0)$
- dotaz
  $\textsc{Ask}(KB, \exists s\ Držím(Zlato, s))$

  tj., "V jaké situaci budu držet Zlato?"
- situace jsou propojeny pomocí funkce *Result*:
  $Result(a, s)$ . . . *situace, která je výsledkem činnosti a v s*
- odpověď (např. v situaci, kdy hned na vedlejším poli je Zlato)
  $\{s/Result(Zvednutí, Result(Krok\ dopředu, S_0))\}$

  tj., jdi dopředu a zvedni Zlato

PL1 je dostatečně expresivní logika pro bázi znalostí Wumpusovy jeskyně

Příklady jiných logik

výroková a predikátová logika – přesné vymezení (výroků, objektů, relací, ...)

v reálném světě existují logicky obtížné otázky:

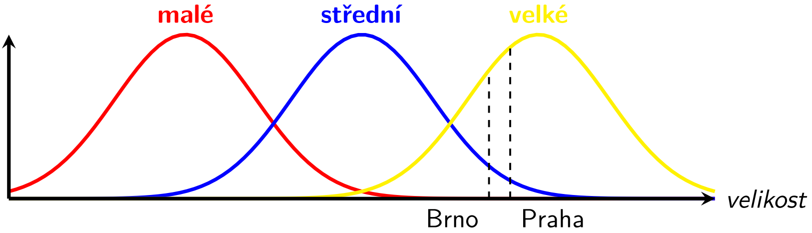
Je Brno velké město?
Mají v této restauraci lahodné jídlo?
Je tento člověk vysoký?

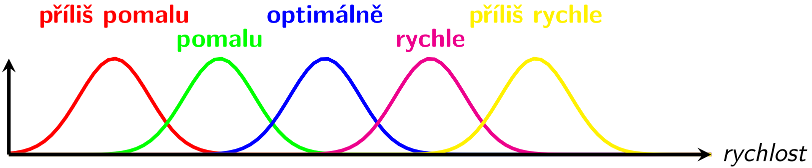
odpověď často "záleží na okolnostech"

Fuzzy logika

tvrzení mají míru pravdivosti $\in [0, 1]$

Brno je velké město – míra pravdivosti 0.7
Praha je velké město – míra pravdivosti 0.9





Pravděpodobnost

hodnoty pravdivosti zůstávají true a false

liší se pravděpodobnost (míra jistoty), že pravdivost je true ($\in [0, 1]$)

může vycházet např. z naměřené frekvence hodnot v čase

Občané ČR hodnotí Brno jako velké město s pravděpodobností 0.8

rozdíly proti fuzzy logice:

- fuzzy logika pracuje lépe s jazykovými, subjektivními hodnotami
  pravděpodobnost zpracovává frekvenční, objektivní data
- fuzzy logika používá stupně příslušnosti a pravidla
  pravděpodobnost definuje matematické vztahy a distribuce
- fuzzy logika umožňuje částečnou pravdivost
  pravděpodobnost počítá náhodnost pomocí statistiky

Modální logiky

nejistotu vyjadřují pomocí nových operátorů jako:

- nutnost $\Box\phi$ – nutně platí ϕ, ϕ je vždy pravda
- možnost $\Diamond\phi$ – možná platí ϕ, ϕ je někdy pravda

operátory $\Box$ a $\Diamond$ jsou vzájemně převoditelné:

$$\Box\phi \quad \Leftrightarrow \quad \neg\Diamond\neg\phi$$
$$\Diamond\phi \quad \Leftrightarrow \quad \neg\Box\neg\phi$$

Lidé jsou smrtelní, tedy neexistuje nesmrtelný člověk.

$$\Box(\forall x\, \mathit{člověk}(x) \Rightarrow \mathit{smrtelný}(x)) \quad \Rightarrow \quad \neg\Diamond(\exists x\, \mathit{člověk}(x) \wedge \neg\mathit{smrtelný}(x))$$

umožňuje zachytit filosofické vztahy vědomosti (nějaké tvrzení vím), povinnosti (závazku) nebo příčiny

pravdivost se vyhodnocuje ve vztahu k možným světům

Logiky vyšších řádů

Kdo lže, ten krade.	$\forall x\, lže(x) \Rightarrow krade(x)$
Krást se nemá.	$špatná\_vlastnost(krade)$

v **logikách vyšších řádů** (*higher-order logic*, *HOL*) je možné kvantifikovat nejen jednotlivé objekty, ale i predikáty a funkce

nejvyšší řád může být dán pevně (aritmetika – logika 2.řádu) nebo induktivně neomezeně

HOL mají vyšší expresivitu, ale od 2.řádu pro ně neexistuje úplná inference

Temporální logiky a Intenzionální logiky

Petr Pavel je prezident ČR:

- v roce 2024 true
- v roce 2020 false

temporální logiky pracují s časem jako parametrem pro vyhodnocení pravdivosti

intenzionální logiky (IL) definují extenze (z PL1) jako hodnoty intenzí v daném světě a čase.

IL umožňují:

- rozlišovat tvrzení de re a de dicto
  Biden je prezident USA. Trump chce být prezidentem USA,
  *~~tedy~~**neplatí, že** Trump chce být Bidenem.*
- rozlišovat postoje
  Vím, že Petr věří, že Země je plochá.

Znalostní inženýrství

Knowledge engineering

1. identifikovat otázky
2. shromáždit příslušné znalosti (*knowledge acquisition*)
3. určit slovník predikátů, funkcí a konstant (ontologii) – ovlivňuje efektivitu
4. zakódovat obecné znalosti o doméně
5. zakódovat popis instance problému
6. položit dotazy inferenční proceduře a získat odpovědi
7. ladit a evaluovat bázi znalostí – hledat, jestli jde odvodit nepravdivé nebo nejde odvodit pravdivé závěry

Logika v AI

využití **logických principů** v **AI**:

- strukturní ekvivalence – např. elektronických obvodů, kódů
- verifikace programů
- plánování a splňování podmínek
- konzistenční diagnóza
- rozhodování na základě pravidel a vstupu
- zpracování neúplných nebo nejistých znalostí
- strojové učení:
  - indukce hypotéz
  - neuro-symbolické učení