

Programy a algoritmy pracující s čísly

IB111 Úvod do programování

2016

- práce s čísly v Pythonu
- ukázky programů, ilustrace použití základních konstrukcí
- ukázky jednoduchých algoritmů, ilustrace rozdílu v efektivitě

- `int` – celá čísla
- `float`
 - čísla s plovoucí desetinnou čárkou
 - reprezentace: báze, exponent
 - nepřesnosti, zaokrouhlování
- (`complex` – komplexní čísla)

Nepřesnosti

Přesná matematika:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 \cdot x = 1$$

Nepřesné počítače:

```
>>> x = 2**50
>>> ((1 + 1 / x) - 1) * x
1.0
>>> x = 2**100
>>> ((1 + 1 / x) - 1) * x
0.0
```

Číselné typy – poznámky

- explicitní přetypování: `int(x)`, `float(x)`
- automatické „nafukování“ typu `int`:
 - viz např. `2**100`
 - pomalejší, ale korektní
 - rozdíl od většiny jiných prog. jazyků (běžné je „přetečení“)

v Python2.7 dělení: rozdíl `3/2` a `3/2.0`

v Python3 dělení intuitivní

Pokročilejší operace s čísly

Některé operace v knihovně `math`:

- použití knihovny: `import math`
- zaokrouhlování: `round`, `math.ceil`, `math.floor`
- absolutní hodnota: `abs`
- `math.exp`, `math.log`, `math.sqrt`
- goniometrické funkce: `math.sin`, `math.cos`, ...
- konstanty: `math.pi`, `math.e`

Ciferný součet

- vstup: číslo x
- výstup: ciferný součet čísla x
- příklady:
 - $8 \rightarrow 8$
 - $15 \rightarrow 6$
 - $297 \rightarrow 18$
 - $11211 \rightarrow 6$

Ciferný součet: základní princip

opakovaně provádíme:

- dělení 10 se zbytkem – hodnota poslední cifry
- celočíselné dělení – „okrajování“ čísla

Ciferný součet – nevhodná pasáž

```
if n % 10 == 0:
    f = 0 + f
elif n % 10 == 1:
    f = 1 + f
elif n % 10 == 2:
    f = 2 + f
elif n % 10 == 3:
    f = 3 + f
elif n % 10 == 4:
    f = 4 + f
...
```

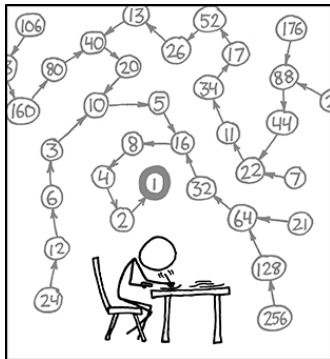
Ciferný součet – řešení

```
def digit_sum(n):  
    result = 0  
    while n > 0:  
        result += n % 10  
        n = n // 10  
    return result
```

Collatzova posloupnost

- vezmi přirozené číslo:
 - pokud je sudé, vyděl jej dvěma
 - pokud je liché, vynásob jej třemi a přičti jedničku
- tento postup opakuj, dokud nedostaneš číslo jedna

Collatzova posloupnost: xkcd



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

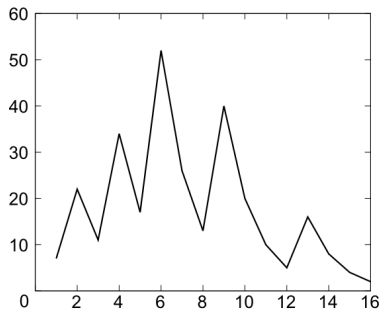
<https://xkcd.com/710/>

Collatzova posloupnost: výpis

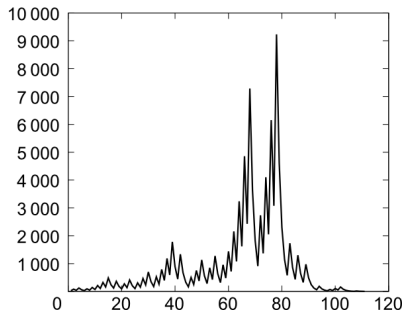
```
def collatz_sequence(n):  
    while n != 1:  
        print(n, end=", ")  
        if n % 2 == 0:  
            n = n // 2  
        else:  
            n = 3*n + 1  
    print(1)
```

Collatzova posloupnost: příklady graficky

začínající číslem 7



začínající číslem 27



Bonus: Vykreslení grafu v Pythonu

Využívá seznamy a knihovnu pylab

```
import pylab

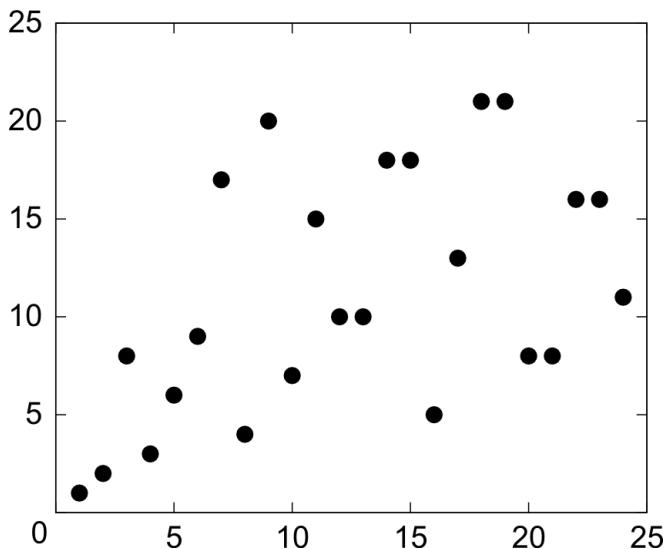
def collatz(n):
    sequence = []
    while n != 1:
        sequence.append(n)
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = 3*n + 1
    sequence.append(1)
    return sequence

pylab.plot(collatz(27))
pylab.show()
```

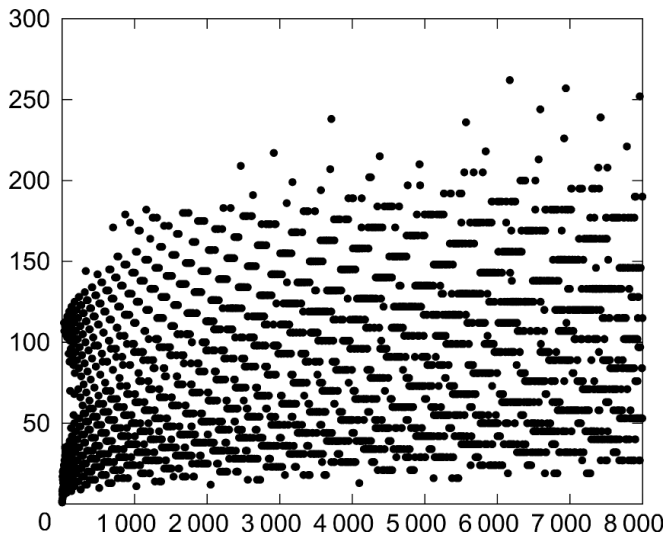
Collatzova posloupnost: délka posloupnosti

```
def collatz_length(n):  
    length = 1  
    while n != 1:  
        if n % 2 == 0:  
            n = n // 2  
        else:  
            n = 3*n + 1  
        length += 1  
    return length  
  
def collatz_table(count):  
    for i in range(1, count+1):  
        print(i, collatz_length(i))
```


Collatzova posloupnost: délka posloupnosti I



Collatzova posloupnost: délka posloupnosti II



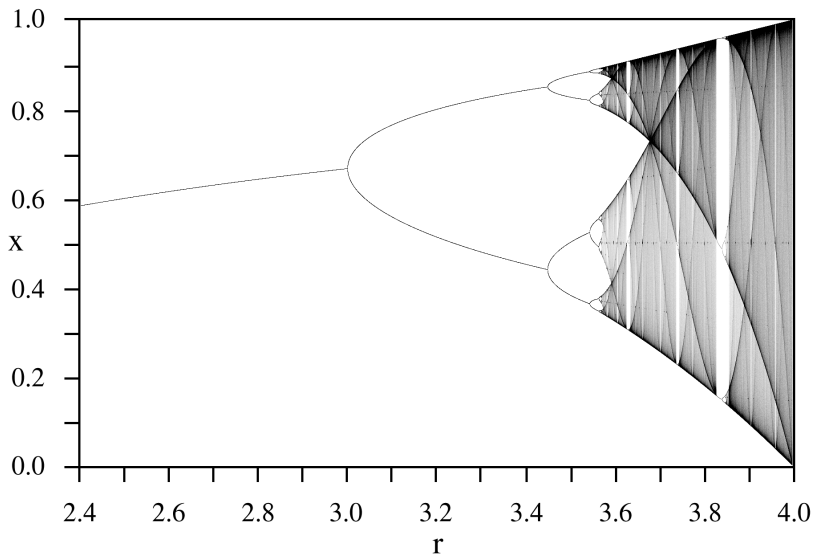
Collatzova hypotéza

- Hypotéza: Pro každé počáteční číslo n , posloupnost narazí na číslo 1.
- experimentálně ověřeno pro velká n ($\sim 10^{18}$)
- důkaz není znám

Logistická diferenční rovnice

$$x_{n+1} = 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

- jednoduchý úkol: výpis členů posloupnosti
- chaotické chování – citlivost k počátečním podmínkám (viz ukázka)
- zajímavé souvislosti: modelování populací, chaos, fraktály



Zdroj: Wikipedia

Největší společný dělitel

- vstup: přirozená čísla a, b
- výstup: největší společný dělitel a, b
- příklad: 180, 504

Jak na to?

Naivní algoritmus I

- projít všechny čísla od 1 do $\min(a, b)$
- pro každé vyzkoušet, zda dělí a i b
- vzít největší

Naivní algoritmus II

- „školní“ algoritmus
- najít všechny dělitele čísel a, b
- projít dělitele, vybrat společné, vynásobit
- příklad:
 - $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
 - $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
 - $NSD = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Euklidův algoritmus: základ

základní myšlenka: pokud $a > b$, pak:

$$NSD(a, b) = NSD(a - b, b)$$

příklad:

<i>krok</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1	504	180
2	324	180
3	180	144
4	144	36
5	108	36
6	72	36
7	36	36
8	36	0

Euklidův algoritmus: vylepšení

vylepšená základní myšlenka: pokud $a > b$, pak:

$$NSD(a, b) = NSD(a \bmod b, b)$$

<i>krok</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
1	504	180
2	180	144
3	144	36
4	36	0

Euklidův algoritmus: program

varianta s odčítáním, bez rekurze

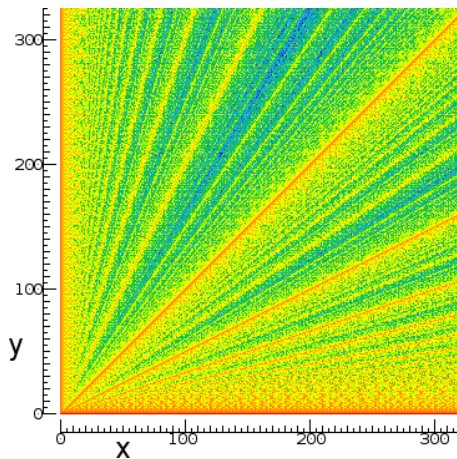
```
def nsd(a,b):  
    if a == 0:  
        return b  
    while b != 0:  
        if a > b:  
            a = a - b  
        else:  
            b = b - a  
    return a
```

Euklidův algoritmus: program

modulo varianta, rekurzivně

```
def nsd(a,b):  
    if b == 0:  
        return a  
    else:  
        return nsd(b, a % b)
```

Euklidův algoritmus – vizualizace



http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm

Efektivita algoritmů

- proč byly první dva algoritmy označeny jako „naivní“?
- časová náročnost algoritmu:
 - naivní: exponenciální vůči počtu cifer
 - Euklidův: lineární vůči počtu cifer
- různé algoritmy se mohou **výrazně** lišit svou efektivností
- často rozdíl použitelné vs nepoužitelné
- více později (a v dalších předmětech)

Výpočet odmocniny

- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota \sqrt{x}

Jak na to?

Výpočet odmocniny

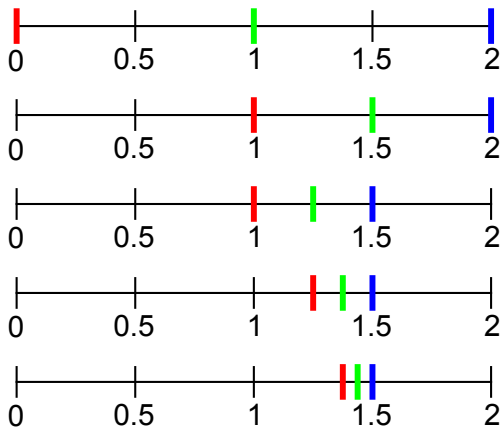
- vstup: číslo x
- výstup: přibližná hodnota \sqrt{x}

Jak na to?

Mnoho metod, ukázka jedné z nich (rozhodně ne nejvíce efektivní)

Výpočet odmocniny: binární půlení

spodní odhad střed horní odhad



Výpočet odmocniny: binární půlení

```
def square_root(x, precision = 0.01):  
    upper = x  
    lower = 0  
    middle = (upper + lower) / 2  
    while abs(middle**2 - x) > precision:  
        if middle**2 > x:  
            upper = middle  
        if middle**2 < x:  
            lower = middle  
        middle = (upper + lower) / 2  
    return middle
```

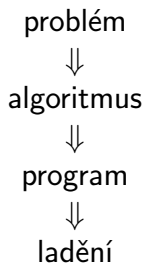
Výpočet odmocniny – chyba

Drobný problém: Program není korektní.

Kde je chyba?

- Funguje korektně jen pro čísla ≥ 1 .
- Co program udělá pro čísla < 1 ?
- Proč?
- Jak to opravit?

Vsuvka: Obecný kontext



Poznámka o ladění

- laděním se nebudeme (na přednáškách) příliš zabývat
- to ale neznamená, že není důležité...

Ladění je dvakrát tak náročné, jak psaní vlastního kódu. Takže pokud napíšete program tak chytře, jak jen umíte, nebudete schopni jej odladit. (Brian W. Kernighan)

Do průšvihů nás nikdy nedostane to, co nevíme. Dostane nás tam to, co víme příliš jistě a ono to tak prostě není. (Y. Berry)

- ladící výpisy
 - např. v každé iteraci cyklu vypisujeme stav proměnných
 - doporučeno vyzkoušet na ukázkových programech ze slidů
- použití debuggeru
 - dostupný přímo v IDLE
 - sledování hodnot proměnných, spuštěných příkazů, breakpointy, ...
 - více: cvičení, pozdější přednáška

Součet druhých mocnin

- Lze zapsat zadané číslo jako součet druhých mocnin?
- Příklad: $13 = 2^2 + 3^2$
- Která čísla lze zapsat jako součet druhých mocnin?

Součet druhých mocnin: řešení I

```
def sum_of_squares_test(n):  
    for i in range(n+1):  
        for j in range(n+1):  
            if i**2 + j**2 == n:  
                print(n, "=", i**2, "+", j**2)
```

- Program je zbytečně neefektivní. Proč?
- Výpis čísel, která lze zapsat jako součet čtverců

Součet druhých mocnin: řešení II

```
def is_square(n):  
    square_root = int(n**0.5)  
    return square_root**2 == n  
  
def is_sum_of_squares(n):  
    for i in range(int(n**0.5) + 1):  
        rest = n - i**2  
        if is_square(rest):  
            return True  
    return False  
  
def print_sums_of_squares(count):  
    for i in range(count):  
        if is_sum_of_squares(i):  
            print(i, end=" ",)
```

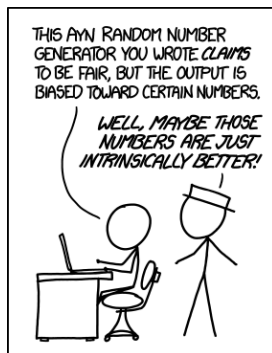
- variace: součet tří druhých mocnin, součet dvou třetích mocnin, ...
- další náměty na posloupnosti: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, <http://oeis.org/>

Náhodná čísla

- přesněji: *pseudo-náhodná* čísla
- opravdová náhodná čísla: <http://www.random.org/>
- bohaté využití v programování: výpočty, simulace, hry, ...
- Python
 - `import random`
 - `random.random()` – float od 0 do 1
 - `random.randint(a,b)` – celé číslo mezi a, b
 - mnoho dalších funkcí

Náhodná čísla: xkcd

```
int getRandomNumber()  
{  
    return 4; // chosen by fair dice roll.  
              // guaranteed to be random.  
}
```



<https://xkcd.com/221/>
<https://xkcd.com/1277/>

Náhodná čísla: průměr vzorku

Vygenerujeme náhodná čísla a vypočítáme průměrnou hodnotu:

```
def random_average(count, maximum = 100):  
    total = 0  
    for i in range(count):  
        total += random.randint(0, maximum)  
    return total / count
```

Jakou očekáváme hodnotu na výstupu? Jak velký bude rozptyl hodnot? (Názorná ukázka *centrální limitní věty*)

Simulace volebního průzkumu

- volební průzkumy se často liší; jaká je jejich přesnost?
- přístup 1: matematické modely, statistika
- přístup 2: simulace
- program:
 - vstup: preference stran, velikost vzorku
 - výstup: preference zjištěné v náhodně vybraném vzorku

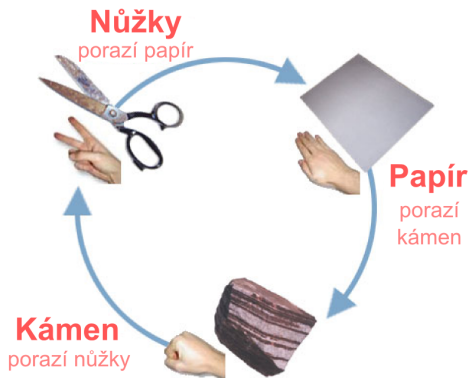
Simulace volebního průzkumu

```
def survey(size, pref1, pref2, pref3):  
    count1 = 0  
    count2 = 0  
    count3 = 0  
    for i in range(size):  
        r = random.randint(1,100)  
        if r <= pref1: count1 += 1  
        elif r <= pref1 + pref2: count2 += 1  
        elif r <= pref1 + pref2 + pref3: count3 += 1  
    print("Party 1:", 100.0 * count1 / size)  
    print("Party 2:", 100.0 * count2 / size)  
    print("Party 3:", 100.0 * count3 / size)
```

Poznámky ke zdrojovému kódu

- uvedené řešení není dobré:
 - „copy & paste“ kód
 - funguje jen pro 3 strany
- lepší řešení – využití seznamů

Kámen, nůžky, papír



http://cs.wikipedia.org/wiki/Kámen,_nůžky,_papír

KNP: strategie

```
def strategy_uniform():  
    r = random.randint(1,3)  
    if r == 1:  
        return "R"  
    elif r == 2:  
        return "S"  
    else:  
        return "P"  
  
def strategy_rock():  
    return "R"
```

KNP: vyhodnocení tahu

```
def evaluate(symbol1, symbol2):  
    if symbol1 == symbol2:  
        return 0  
    if symbol1 == "R" and symbol2 == "S" or \  
        symbol1 == "S" and symbol2 == "P" or \  
        symbol1 == "P" and symbol2 == "R":  
        return 1  
    return -1
```

KNP: sehrání západu

```
def rsp_game(rounds):  
    points = 0  
    for i in range(1, rounds+1):  
        print("Round ", i)  
        symbol1 = strategy_uniform()  
        symbol2 = strategy_uniform()  
        print("Symbols:", symbol1, symbol2)  
        points += evaluate(symbol1, symbol2)  
        print("Player 1 points:", points)
```

KNP: obecnější strategie

```
def strategy(weightR, weightS, weightP):  
    r = random.randint(1, weightR + weightS + weightP)  
    if r <= weightR:  
        return "R"  
    elif r <= weightR + weightS:  
        return "S"  
    else:  
        return "P"
```

KNP: rozšiřující náměty

- turnaj různých strategií
- strategie pracující s historií
 - kopírování posledního tahu soupeře
 - analýza historie soupeře (hraje vždy kámen? → hraj papír)
- rozšíření na více symbolů (Kámen, nůžky, papír, ještěr, Spock)

- operace s čísly, náhoda
- ukázky programů
- ukázky algoritmů, efektivita

Příště: Seznamy, řetězce a trocha šifer