

ZÁKLADY STATISTIKY

Doc. RNDr. Jiří Zháněl, Dr.

PRŮVODCE

STATISTICKÝM ZPRACOVÁNÍM

KVANTITATIVNÍCH DAT

Přednášky nk+np2019

DOPORUČENÁ LITERATURA

Anděl, J. (1993). *Statistické metody*. Praha: Matfyzpress.

Cyhelský, L., Kahounová, J. & Hindls, R. (1996). *Elementární statistická analýza*. Praha: Management Press.

Gajda, V. & Zvolská, J. (1982). *Úvod do statistických metod*. PF Ostrava. [Skriptum].

Gibilisco, S. (2009). *Statistika bez předchozích znalostí*. Brno: Computer Press.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Hendl, J. (2012). *Přehled statistických metod zpracování dat. Analýza a metaanalýza dat.*

Praha: Portál.

Kovář, R. & Blahuš, P. (1989). *Aplikace vybraných statistických metod v antropomotorice.* Praha:

SPN. [Skriptum].

Meloun M. & Militký, J. (1994). *Statistické zpracování experimentálních dat.* Praha: Plus.

DOPORUČENÁ LITERATURA

Meloun M. & Militký, J. (1996). *Statistické zpracování experimentálních dat. Sbíрка úloh.* Pardubice: Univerzita Pardubice.

Seger, J. & Hindls, R. (1993). *Statistické metody v ekonomii.* Praha: H & H.

Seger, J. & Hindls, R. (1995). *Statistické metody v tržním hospodářství.* Praha: Victoria Publishing.

A mnoho dalších ...

PROGRAM PŘEDNÁŠEK

1.ÚVOD

1.1 Historie statistiky, pojem a struktura statistiky, základní statistické pojmy

1.2 Teorie měření, měřicí stupnice (škály), metodologické problémy měření

PROGRAM PŘEDNÁŠEK

2. DESKRIPTIVNÍ (POPISNÁ) STATISTIKA

2.1 Statistické třídění dat, zpracování a grafické znázornění

2.1.1 Jednorozměrné rozdělení četností

2.1.2 Jednorozměrné intervalové rozdělení četností

2.1.3 Grafické znázornění rozdělení četností

2.2 Míry polohy

2.3 Míry variability

2.3.1 Kvantilové míry variability

2.3.2 Momentové míry variability

PROGRAM PŘEDNÁŠEK

2.4 Standardní skóre

2.5 Míry závislosti

2.5.1 Závislost pevná, volná, statistická a korelační

2.5.2 Lineární korelace a lineární regrese

2.5.3 Součinnová a pořadová korelace

3. ANALYTICKÁ STATISTIKA

3.1 Věcná a statistická významnost

3.2 Testování statistických hypotéz



1.1 HISTORIE STATISTIKY

1

„Nur wer die Vergangenheit kennt, hat eine Zukunft“.

„Only he who knows the past has a future“.

Wilhelm von Humboldt

(1767-1835, německý učenec a státník, spoluzakladatel Humboldt-Universität zu Berlin).

1.1 HISTORIE STATISTIKY

Nejstarší písemné památky statistické povahy pocházejí **ze Sumeru** (nejstarší stát světa 3000 – 2000 př. n. l., Perský záliv).



Hliněné destičky obsahují záznamy o časových intervalech, počtech osob, počet domácího zvířectva, množství úrody, atd.

1.1 HISTORIE STATISTIKY

Pojem *statistika* pochází z latinského slova *status* (tj. postavení, stav).

Počátky statistických postupů využívány již ve **středověku** ke zjišťování počtu obyvatelstva, velikosti majetku, území, obchodu, armády, atd.

Statistika jako součást přednášek na středověkých univerzitách =>

(1) UNIVERZITNÍ STATISTIKA.

1.1 HISTORIE STATISTIKY

V 17. století se Angličané John Graunt a William Petty zabývali zkoumáním různých ***hromadných společenských jevů*** za pomoci **číselných charakteristik** skupin obyvatelstva (např. *počty narozených a zemřelých osob, počtem obyvatel a složením rodin*).

Tyto postupy byly nazvány **(2) POLITICKÁ ARITMETIKA** (využitelné politicky, používány aritmetické postupy).



1.1 HISTORIE STATISTIKY

17. století:

(3) TEORIE PRAVDĚPODOBNOTI

- **Francie** (B. Pascal, P. de Fermat, de Moivre, de Laplace, Poisson);
- **Holandsko** (Ch. Huygens);
- **Švýcarsko** (J. Bernoulli, Euler);
- **Německo** (C. F. Gauss)
- **Rusko** (Čebyšev, Markov, Ljapunov).

19. století = postupná integrace:

UNIVERZITNÍ STATISTIKA + POLITICKÁ

ARITMETIKA + TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI

⇒ MODERNÍ STATISTIKA

**Aplikace do praxe, do výzkumu o příčinných
vztazích mezi hromadnými jevy**

(Belgie, L. A. J. Quételet).

**Později pronikání statistiky do přírodních a
technických věd**

(Anglie, Galton, Pearson a Fisher).

HISTORIE STATISTIKY V ČECHÁCH

Nejstarší dochovaný zápis:

**„SOUPIS MAJETKU LITOMĚŘICKÉHO KOSTELA
Z ROKU 1058“**

(součást **zakládací listiny** kapituly sv. Štěpána v
Litoměřicích, Český statistický úřad, www.czso.cz).



HISTORIE STATISTIKY V ČECHÁCH

VÝZNAMNÁ DATA

- **13. října 1753** ... patent císařovny Marie Terezie (1717 – 1780) o každoročním sčítání lidu,
- **6. března 1897** ... zřízen **Zemský statistický úřad Království českého**, (první statistický úřad na území dnešní České republiky).
- **1909** ... vyšla první „**Statistická příručka království Českého**“.



HISTORIE STATISTIKY V ČECHÁCH

VÝZNAMNÁ DATA

1918 (vznik Československa) => **zákon č. 49**
o organizaci statistické služby (1919).

1919 ... založen **STÁTNÍ ÚŘAD STATISTICKÝ (SÚS)**
jako orgán pověřený **celostátními statistickými**
šetřeními (např. sčítání lidu).

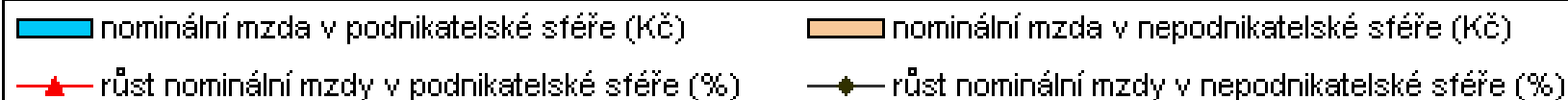
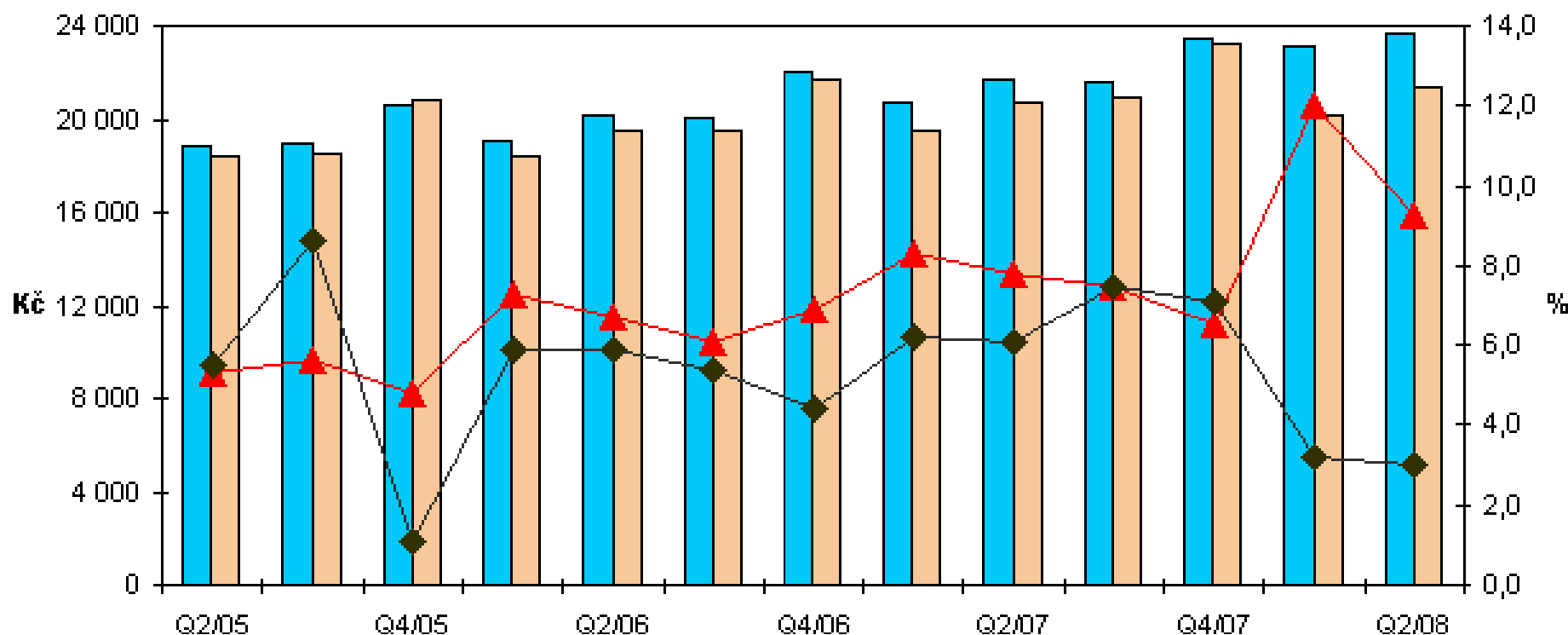
1.1.1993 (vznik ČR) všechny kompetence
převzal **ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD (ČSÚ)**.

Český statistický úřad (ČSÚ)

NEJŽÁDANĚJŠÍ INFORMACE: inflace, makroekonomické údaje, obyvatelstvo, regiony, města, obce, ročenky, sčítání lidu, volební výsledky, základní údaje o ČR.



Průměrná hrubá měsíční nominální mzda v Kč
a její růst v % podle sfér (na fyzické osoby)



1.1.2 POJEM A STRUKTURA STATISTIKY

STATISTIKA OBECNĚ

**Obor zabývající se
zpracováním, rozbořem a zveřejňováním
informací,
které kvantitativně charakterizují
zákonitosti společenského života
(Encyklopedický slovník, 1982).**

1.1.2 POJEM A STRUKTURA STATISTIKY

MATEMATICKÁ STATISTIKA

**Matematický obor zabývající se
zpracováním dat a rozbořem statistických
charakteristik**

popisovaného statistického souboru

(Encyklopedický slovník, 1982)

Základy statistiky = opravdu jen ZÁKLADY! (viz příklad)

Např. *Pravděpodobnost a statistika* (Friesl, 2004).

Definice náhodného jevu:

Je-li dána množina Ω (všech výsledků náhodného pokusu, tj. pokusu, jehož výsledek není jednoznačně určen podmínkami, za kterých je prováděn), pak **náhodným jevem (v Ω) nazýváme každou podmnožinu množiny Ω .**

Jev Ω nazýváme jistý, jev \emptyset nemožný. Jednotlivé výsledky ω patří do Ω se nazývají elementární jevy.

(MATEMATICKÁ) STATISTIKA

```
graph TD; A["(MATEMATICKÁ) STATISTIKA"] --> B["1. DESKRIPTIVNÍ (popisná)"]; A --> C["2. ANALYTICKÁ (inferentní, induktivní, srovnávací)"];
```

1. DESKRIPTIVNÍ

(popisná)

2. ANALYTICKÁ

(inferentní, induktivní,
srovnávací)

1. DESKRIPTIVNÍ STATISTIKA

se zabývá **zpracováním a popisem dat.**

Poskytuje metody umožňující přehledné a názorné zpracování dat, např. v podobě:

- **tabulek,**
- **grafů (znázornění rozložení četností),**
- **výpočtu základních statistických charakteristik** (např. aritmetický průměr nebo korelační koeficient).

2. ANALYTICKÁ (INFERENTNÍ) STATISTIKA

vychází z výsledků **deskriptivní statistiky** (zpracování dat), **umožňuje nám data analyzovat, tzn. vyhodnotit.**

Tedy např. pomocí statistických metod posoudit, zda **střední hodnoty (M)** výsledků testu „skok daleký z místa“ tréninkových skupin A a B vykazují **významný rozdíl**, který může být vysvětlován použitou tréninkovou metodou.

SYMBOLICKÉ ZNÁZORNĚNÍ FUNKCE STATISTIKY

STATISTIKA = ZPRACOVÁNÍ + POPIS + ANALÝZA DAT

1.1.3 ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ POJMY

STATISTICKÝ SOUBOR

je souhrn (množina) statistických jednotek stejného druhu

Rozlišujeme pojmy **základní soubor** a **výběrový soubor**.

Rozsah základního souboru **N**, výběrového souboru **n**.

Základní soubor (N) je soubor všech statistických jednotek, které teoreticky mohou být předmětem sledování.

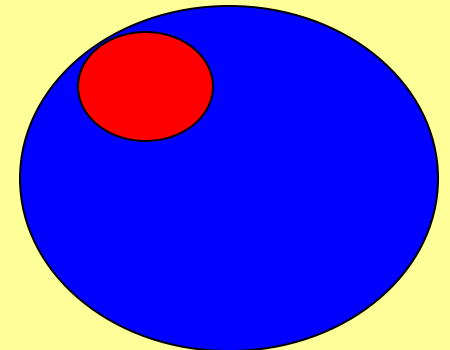
... např. všichni studenti oboru TV a sport = v ČR, Evropě, na světě, ...

ZÁKLADNÍ SOUBOR (ZS)

ZS má zpravidla značný rozsah, zjištění zkoumaných vlastností všech prvků je buďto **nemožné** nebo je **příliš časově a ekonomicky náročné**.

Výzkumné šetření (zjištění) se proto provádí u **vybraných jednotek** ze základního souboru => **výběrový soubor (n)**.

Výběrový soubor je náhodnou podmnožinou prvků ***základního souboru*** a reprezentuje jej.



VÝBĚROVÝ SOUBOR (VS) získáváme tzv. NÁHODNÝM VÝBĚREM.

Každý prvek základního souboru má stejnou možnost být vybrán.

O vybrání či nevybrání do výběrového souboru rozhoduje tedy pouze náhoda.

Př. ZS (N=10 000) = studenti TV v CZ, VS (n=100)

Výzkum u prvků výběrového souboru (TV, H, síla):

na základě poznání vlastností *výběrového souboru* se usuzuje – při splnění určitých podmínek - na vlastnosti *základního souboru*.

METODY NÁHODNÉHO VÝBĚRU PRVKŮ DO VÝBĚROVÉHO SOUBORU (VS):

I. LOSOVÁNÍ

- losování statistických jednotek s jejich vracením do osudí (u malých souborů),
- losování statistických jednotek bez vracení do osudí (u velkých souborů),
- **generátor náhodných čísel** (software

<https://supermartas.cz/aplikace/online/nahodna-cisla/>)

II. Tabulka náhodných čísel

- 1. V tabulce zvolíme libovolné číslo, od něj čteme uvedená čísla s potřebným počtem míst (např. $N=540 \Rightarrow$ trojmístná čísla).**
- 2. Do výběru zahrnujeme ty jednotky základního souboru, jejichž přiřazená čísla jsou < 540 .**
- 3. Čísla vyšší než rozsah základního souboru vynecháme.**
- 4. Pokračujeme tak dlouho, než dosáhneme požadovaného rozsahu výběrového souboru.**

Např. ze základního souboru $N=540$ máme vybrat $n=12$

N=540	85306	37114	22718	50584	92291	56575	24075	43889
	32066	43098	75738	94910	15403	89151	73322	18370
	63314	87302	49472	24885	79506	60638	07132	00908
	40287	52435	23926	92544	54099	31497	06853	22864
	30925	46148	20138	33874	56715	38424	38273	11361
n=12	27146	37012	43361	03173	97911	71313	44256	66609
	01674	47274	56350	37512	14883	99673	62298	33948
	76730	25043	16686	54737	57431	01786	20803	69465
	93941	84434	22384	13240	93617	51549	28532	57150
	<u>90475</u>	<u>10341</u>	<u>39703</u>	<u>83224</u>	<u>37858</u>	<u>61657</u>	<u>04184</u>	<u>15597</u>
86115	17196	24569	26820	66299	39960	02489	53079	
51156	74037	12501	94162	42006	16135	82797	31296	
59886	03051	78702	13402	74318	10870	72107	11550	
13960	95736	43637	60399	19080	60261	11207	73065	
39954	86726	91039	13884	25376	36880	02564	96978	
47906	99501	27753	69946	66875	25601	30038	78786	
66444	15979	83469	76952	50065	72802	70630	87336	
40177	01081	57788	08612	39886	42234	04905	83274	
46747	30655	41878	93610	51745	41771	61398	98154	
60888	18689	45966	25837	70906	60733	11765	09293	

**Výsledek: 936 (mimo), 175, 154, 928, 532, 571, 509,
047, 510, 341, 397, 038, 322, 437, 858, 616, 570, 418.**

**Možno vyzkoušet pomocí Excelu – Analýza dat –
Generátor náhodných čísel:**

Typ rozložení - diskrétní

Počet proměnných – dle počtu číslic

jednociferné $n = 1$

dvouciferné $n = 2$

atd.

Pro $N=540$ se počet proměnných rovná 3.

III. SKUPINOVÝ VÝBĚR

... užívá se, je-li základní soubor velmi početný a je uspořádán **do skupin** (např. třídy ve škole), z nichž **vybíráme skupiny** – nutný je dostatečný počet skupin.

IV. STRATIFIKOVANÝ VÝBĚR

... vychází z **rozdělení** základního souboru **na skupiny** (straty), z každé z nich se pak dělá náhodný výběr. Je žádoucí **proporcionální zastoupení** ve výběru ze **straty** (neproporcionální ve specifických případech).

Př. 1. výzkumný soubor „**vysokoškoláci**“ (= studující techniky, univerzity, uměleckých vysokých škol, atd.).

Př. 2. výzkumný soubor „**učitelé s praxí do ...**“
(1. do 5 let, 2. do 10 let, 3. do 15 let, do 20 let, atd.).

V. ZÁMĚRNÝ VÝBĚR

... nerozhoduje náhoda, výzkumník sám **vybír**á jedince jež považuje za **typické** (subjektivní výběr).

Výsledky se týkají jen **daného výběru** (v závěrech výzkumu nutná formulace: „**na daném vzorku se prokázalo, že...**“)!!!

Problém: výběr **x** dobrovolníci (rozdíly - vyšší výkon, motivace, větší potřeba sociálního uznání, ...).

Nelze je použít při standardizaci testů!

Další podrobnosti např.

Chrástka, M. (2007). **Metody pedagogického výzkumu.**

STATISTICKÉ JEDNOTKY

jsou prvky statistického souboru, které mají alespoň jednu společnou vlastnost (znak)

Statistickými jednotkami mohou být např. osoby, věci, události, jejichž vlastnosti nás zajímají (student, klub).

Zjišťujeme-li u každé statistické jednotky pouze **jeden statistický znak** (např. tělesnou výšku), hovoříme o **jednorozměrném statistickém souboru**.

Zjišťujeme-li **dva nebo více znaků**, hovoříme o **dvourozměrném** (výška a hmotnost), resp. o **vícerozměrném** statistickém souboru (3 a více znaků).

STATICKÉ ZNAKY

**Vyjádření hodnot statistických znaků
(proměnných) slovy nebo čísly.**

Klasifikace:

- 1. Slovní proměnné = alfabetické
(kategoriální)
se nazývají kvalitativní znaky.**
- 2. Číselné proměnné = numerické
se nazývají kvantitativními znaky.**

STATICKÝ ZNAK

je společná vlastnost jednotek statistického souboru

Statistické znaky tedy vyjadřují vlastnosti statistických jednotek.

1. KVALITATIVNÍ

(kategoriální,
vyjádřeny slovně)



Např. muž/žena, plavec/neplavec, zdravý/nemocný

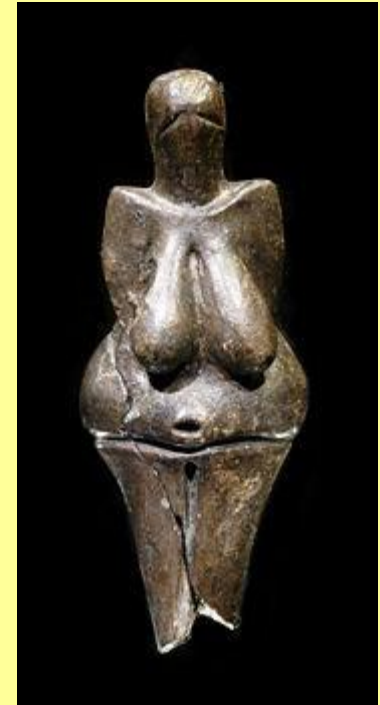
barva očí: zelené, modré, hnědé, ...

herní kategorie: žáci mladší, starší, junioři, ...

1. KVALITATIVNÍ ZNAKY

☯ *alternativní (binární, dichotomické):*

nabývá-li znak pouze **dvou** variant (muž/žena)

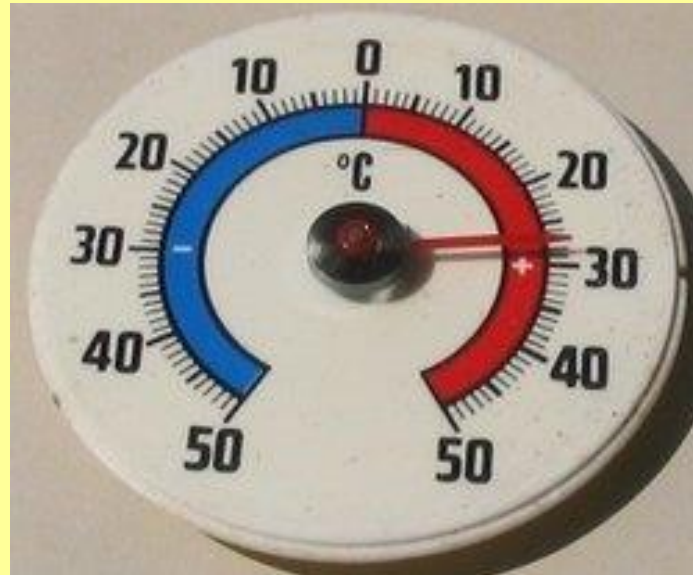
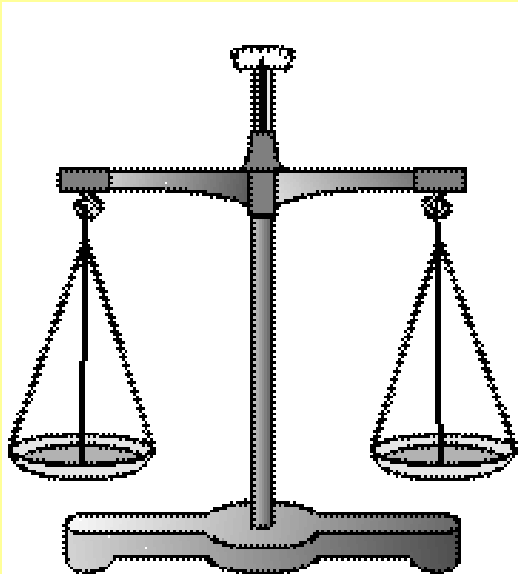


☯ *množné (polytomické):*

nabývá-li znak **více** než dvou variant (barva očí: zelená, modrá, černá, atd.).



2. KVANTITATIVNÍ (vyjádřeny číselně, např. věk 37 let, tělesná výška 183 cm, hmotnost, čas, ...)



2. KVANTITATIVNÍ ZNAKY

☯ *spojité neboli kontinuální*

(nabývají libovolných reálných číselných hodnot, např. výsledek v běhu na 100 m, ve skoku vysokém, mezi 2 hodnotami vždy může být další),

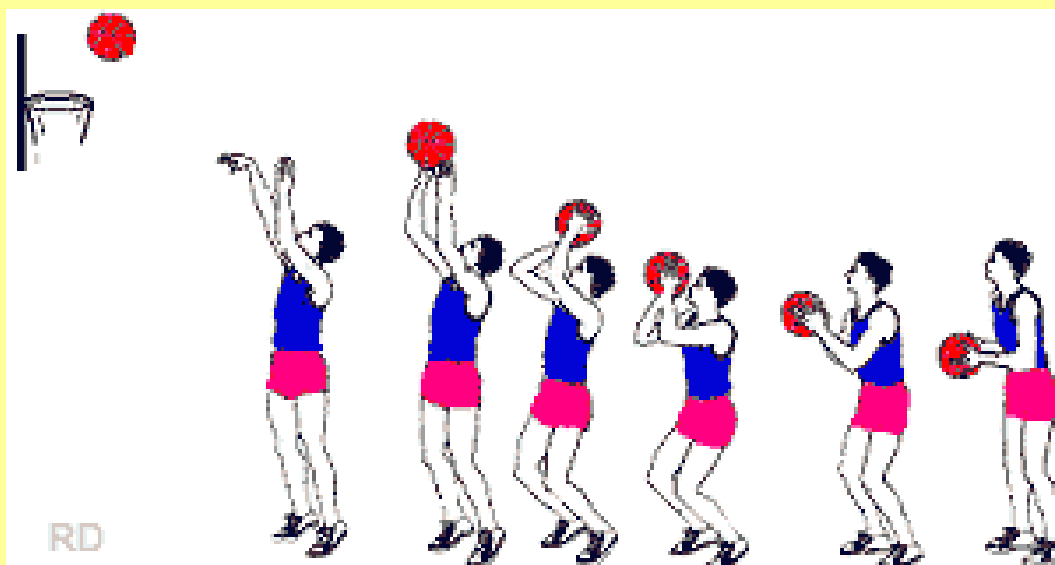


2. KVANTITATIVNÍ ZNAKY

☯ *nespojité neboli diskrétní*

(nabývají pouze konečný počet číselných hodnot, nejčastěji z oboru celých nezáporných čísel.

např. počet úspěšných hodů na koš, leh-sedy, atd.).



1.2 TEORIE MĚŘENÍ, MĚŘÍCÍ STUPNICE (ŠKÁLY)

2

1.2.1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE MĚŘENÍ



Měření ... v průběhu historického vývoje lidské společnosti běžná každodenní procedura (užití hodinek, tachometru automobilu, atd.).

Historické počátky měření ... porovnávání objektů s počtem prstů, délkou palce, délkou chodidla, lokte, paže tj. primitivní měřící způsoby.

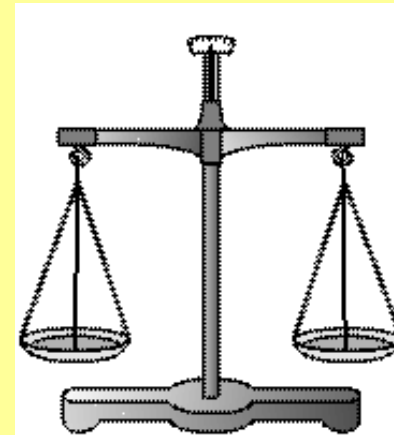
Rozvoj vědy a techniky složitých měřících přístrojích.

1.2 TEORIE MĚŘENÍ, MĚŘÍCÍ STUPNICE (ŠKÁLY)

1.2.1 ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE MĚŘENÍ

Problematiku kvantifikace (měření) řeší obor nazývaný **TEORIE MĚŘENÍ**.

a) Měřitelnost *fyzikálních vlastností* (délka, čas, hmotnost),



b) Měřitelnost *psychických vlastností* (inteligence, strach, postoje).

REPREZENTAČNÍ TEORIE MĚŘENÍ (Campbell):

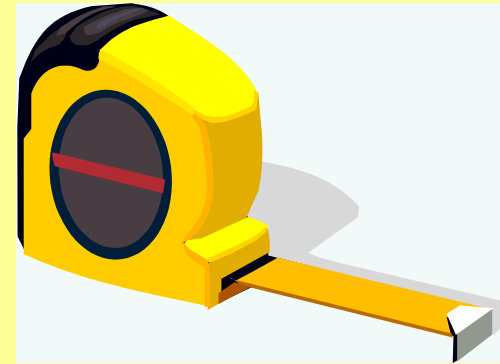
... měření jako „přiřazování číslíc k reprezentaci vlastností“.

... později doplněna (Stevens) o formulaci „...za měření lze považovat každé přiřazování číslíc k objektům nebo událostem ... podle pravidel.

Klasická koncepce měření rozlišuje

(1) fundamentální měření

(2) odvozené měření



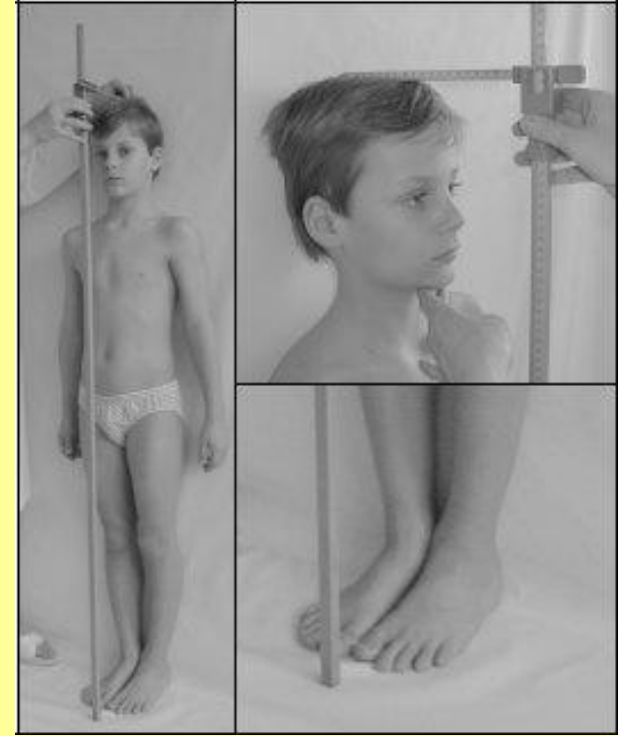
Někteří autoři zmiňují ještě

(3) měření asociativní (Berka, 1977) resp. asociální (Blahuš, 1996), označované rovněž jako měření *per fiat*, *per Definition*, *by fiat* či měření na základě konvence.

(1) FUNDAMENTÁLNÍ MĚŘENÍ

„se vztahuje na bezprostřední měření veličin“ a je to „každé měření, které nezahrnuje žádná předcházející měření“.

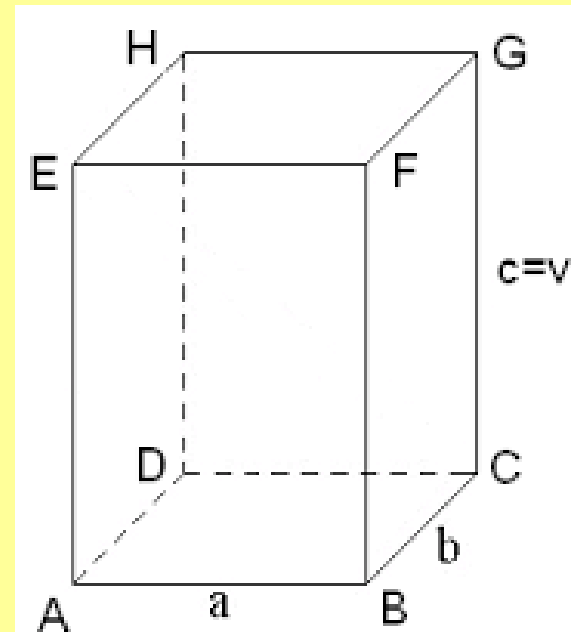
Příklad: měření tělesné výšky



(2) ODVOZENÉ MĚŘENÍ

„předpokládá jiná, dříve provedená měření, z nichž je odvozeno na základě vztahů“; a tedy „závisí na předcházejících měřeních“.

Příklad: měření objemu kvádru

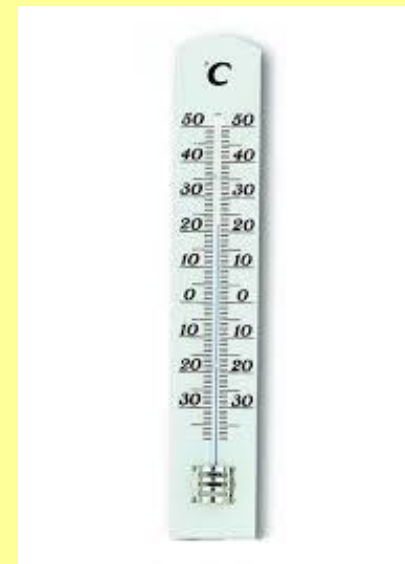


(3) ASOCIATIVNÍ MĚŘENÍ (ASOCIAČNÍ)

je takové měření, kdy „je **přímo** měřená veličina asociována s **nepřímo** měřitelnou veličinou“.

Příklad 1.

Při měření teploty vycházíme ze závislosti změny **objemu kapaliny na teplotě**.



Příklad 2.

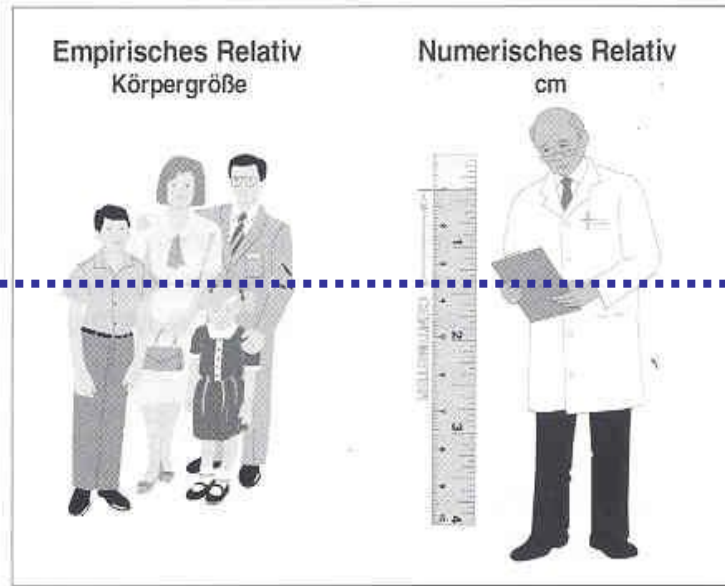
Při testování úrovně vytrvalosti pomocí **Cooper testu** vycházíme z předpokládané **asociace** (vztahu) mezi **uběhnutou vzdáleností** (měřitelná) a **úrovní vytrvalostní schopnosti** (nepřímo měřitelná).

1.2.2 MĚŘÍCÍ STUPNICE (ŠKÁLY)

Rozdíl v měření

**Empirická
proměnná**

Tělesná výška



**Numerická
proměnná**

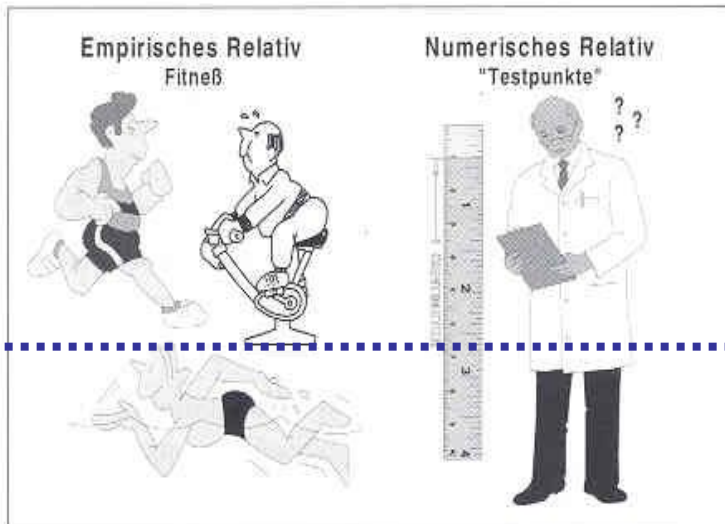
cm

Zuordnungen von Körpergrößen (ER) zu Zahlenwerten (NR)

**Rozdíl ve
způsobu měření
a přiřazení!**

**Empirická
proměnná**

Kondice



**Numerická
proměnná**

Testové skore

Zuordnung von Fitneßausprägungen (ER) zu Testpunkten (NR)

TEORII ŠKÁL

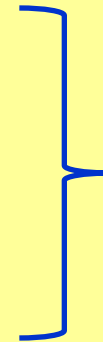
(pojem škála, resp. stupnice)

ZÁKLADNÍ DRUHY ŠKÁL (STUPNIC)

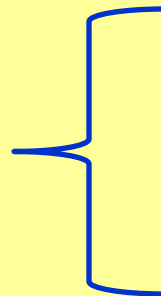
1. **NOMINÁLNÍ škála**
(jmenná, klasifikační)

2. **ORDINÁLNÍ škála**
(pořadová)

3. **METRICKÉ škály**



NEMETRICKÉ



INTERVALOVÁ

POMĚROVÁ

METRICKÉ

1. NOMINÁLNÍ ŠKÁLA

(jmenná, klasifikační)

... je škála založena na jakémkoliv *přiřazování číslíc* ve smyslu pouhého *pojmenování*.

Jde vlastně o *pojmenování* osob či skupin *číslly*, o *uspořádání* do tříd, které se navzájem *vylučují*.

Např. pohlaví (M, Ž), kuřák, nekuřák, národnost, čísla hráčů, atd.

1. NOMINÁLNÍ ŠKÁLA

Třídění na znaky:

1. alternativní (binární, dichotomické) = 2 možnosti
(plavec, neplavec; kuřák, nekuřák; muž, žena)

2. množné (polytomické) = více než 2 možnosti

Základní empirickou operací je „určení rovnosti“.

Možné relace =, ≠,

Zpracování znaků = neparametrické statistické metody

2. ORDINÁLNÍ ŠKÁLA (pořadová)

... předpokládá přirozené **uspořádání objektů** vzhledem k nějaké vlastnosti.

Stupnice umožňuje **uspořádání objektů do pořadí**, je možno určit vztah **větší či menší, těžší či lehčí, atd.**

Nejsou známy odstupy (intervaly) mezi znaky (číslly) !!!

Př. školní známky, stupnice tvrdosti, pořadí v cíli.

Základní empirické operace (2):

„určením rovnosti“ a „určením vztahu více nebo méně“.

Relace =, ≠, >, <,

Zpracování znaků=neparametrické statistické metody.

3. METRICKÉ ŠKÁLY (INTERVALOVÁ A POMĚROVÁ)

NOVÁ VLASTNOST: je zavedena *jednotka měření*, tzn. jsou známy *odstupy (intervaly)* mezi hodnotami (čísly).

3. 1 INTERVALOVÁ ŠKÁLA

... vyžaduje stanovení *měrové jednotky a počátku*, jsou přípustné všechny aritmetické operace.

Nula je zvolená!!! => stanovení počátku dohodou.

Např. letopočet (Diokleciánův, byzantský, křesťanský, čínsky, atd.),

teplota °C (bod tání ledu 0 °C a bod varu 100 °C při při tlaku vzduchu 1013,25 hPa).

3. METRICKÉ ŠKÁLY (INTERVALOVÁ A POMĚROVÁ)

3. 2 POMĚROVÁ ŠKÁLA

... z formálního hlediska vlastně intervalová *škála s přirozeným počátkem*, jsou přípustné všechny aritmetické operace.

Nula je absolutní ... (nepřítomnost jevu).

Např. čas, věk, výška, hmotnost, teplotní stupnice dle Kelvina (v podstatě všechny fyzikální jednotky).

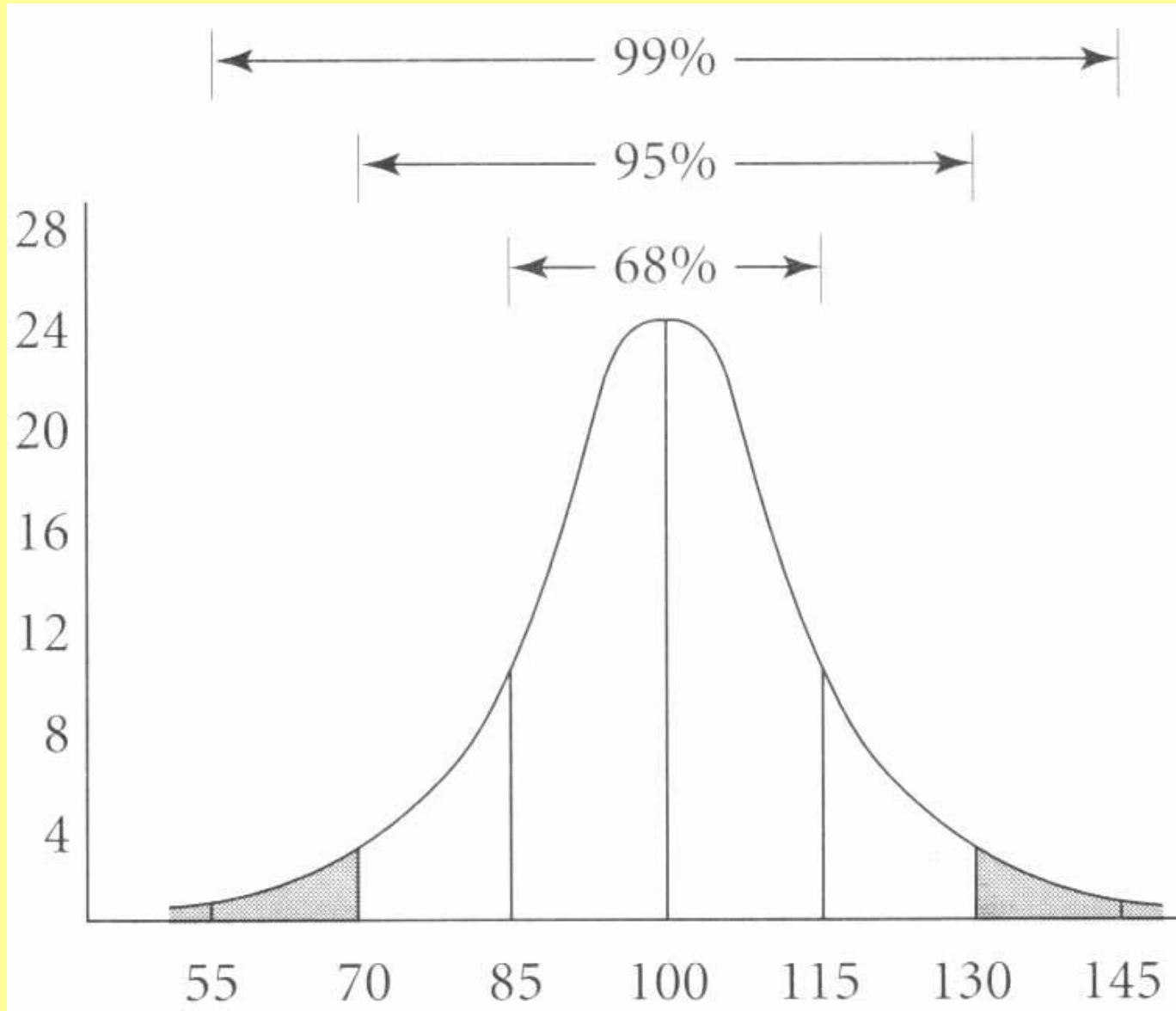
Statistické metody:

parametrické i neparametrické.

Přehled typů škál (upraveno, Bruhn, 1986; Roth, 1995)

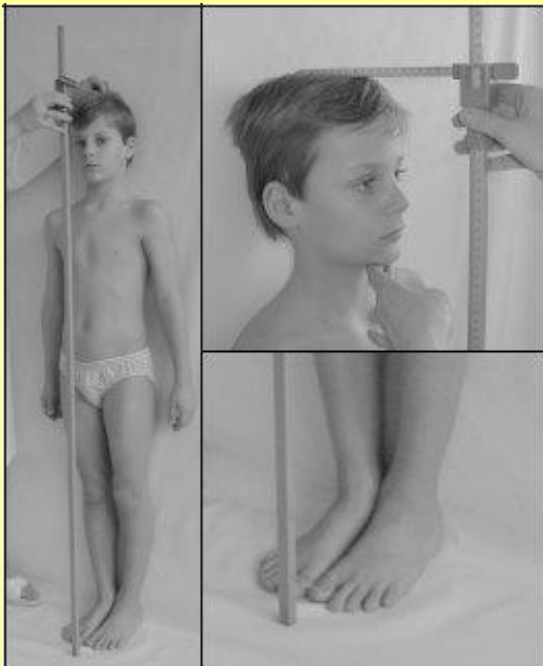
TYP ŠKÁLY	NEMETRICKÉ ŠKÁLY		METRICKÉ ŠKÁLY	
	NOMINÁLNÍ	ORDINÁLNÍ	INTERVALOVÁ	POMĚROVÁ
Příklady	Číselné označení barev, psychologického typu, pohlaví, atd.	Školní známky, stupnice tvrdosti, služební pořadí, Richterova stupnice	Teplota ve °C, Fahrenheita, letopočet, inteligenční kvocient	Teplota °Kelvina, věk, váha, výška, velikost úhlu, čas
Operace	= , ≠	= , ≠, >, <	Navíc: intervaly, nula zvolená	Navíc: nula absolutní
Statistické charakteris.	Modus, absolutní a relativní četnosti	Navíc: medián, kvantily a kvantilové odchylky, procentily	Navíc: arit. Průměr, směrodat.odchylka, šikmost, špičatost	Navíc: koeficient variability, geometr. průměr
Testy Významnosti	χ^2 - test, McNemar test, Cochran test,...	Znaménkový test, Mann-Whitney U-test, Friedmanova pořadová analýza variance, aj.	Parametrické metody: F-test t-test (pro závislé či nezávislé soubory)	Parametrické metody: F-test t-test (pro závislé či nezávislé soubory)
Míry závislosti	Kontingenční a čtyřpolní koeficient	Navíc: pořadová korelace	Navíc: Pearsonova součinnová korelace	Navíc: Pearsonova součinnová korelace
Statistické metody	Některé neparametrické metody	Všechny neparametrické metody	Všechny neparametrické a parametrické metody	Všechny neparametrické a parametrické metody

Intelligenční kvocient (IQ) je index inteligence, který má normální rozložení s průměrem 100 a standardní odchylkou 15.



POSTUP PŘI URČENÍ TYPU ŠKÁLY: A. výška (cm)

1. Je známa *jednotka měření*? ANO Škály metrické
2. Je počátek *zvolený* nebo *absolutní*? absolutní **POMĚROVÁ**
3. Lze *stanovit pořadí*? Nemá smysl zjišťovat
4. Jedná se jen o *pojmenování znaků* čísla? Nemá smysl zjišťovat



Znaky ?

- Kvantitativní
- Výška = spojitý

POSTUP PŘI URČENÍ TYPU ŠKÁLY: B. dějepis (známka)

1. Je známa *jednotka měření*? **NE** => Nemohou být metrické
2. Je počátek *zvolený* nebo *absolutní*? **Nemá smysl zjišťovat**
3. Lze *stanovit pořadí*? **ANO** => **ORDINÁLNÍ**
4. Jedná se jen o *pojmenování znaků* čísky? **Nemá smysl zjišťovat**



Znak?

- Kvantitativní
- Dějepis = spojitý

Pozn. Znamky jsou spojitými znaky, i když jsou měřeny pouze na ordinální škále.

**Klasifikujte znaky obsažené v tabulce – správnou odpověď
označte křížkem (X)**

Znak	ŠKÁLA				ZNAK	
	Nominální (a)	Ordinální (b)	Intervalová (c)	Poměrová (d)	Spojité (e)	Diskrétní (f)
1. Pohlaví						
2. Věk						
3. Počet sourozenců						
4. Znamka z matematiky						
5. Inteligenční kvocient						
6. Hodnocení v krasobruslení						
7. Výkon ve skoku dalekém						

**Pozn. Znamky jsou spojitémi znaky, i když jsou měřeny pouze na
ordinální škále.**

Znak	ŠKÁLA				ZNAK	
	Nominální (a)	Ordinální (b)	Intervalová (c)	Poměrová (d)	Spojité (e)	Diskrétní (f)
1. Pohlaví	■					■
2. Věk				■	■	
3. Počet sourozenců				■		■
4. Znamka z matematiky		■			■	
5. Inteligenční kvocient			■		■	
6. Hodnocení v krasobruslení				■	■	
7. Výkon ve skoku dalekém				■	■	

Řešení: 1. a, f; 2. d, e; 3. d, f; 4. b, e; 5. c, e; 6. d, e; 7. d, e.

Pozn. Znamky jsou spojitými znaky, i když jsou měřeny pouze na ordinální škále.

ANALÝZA JEDNOROZMĚRNÉHO SOUBORU

METODY DESKRIPTIVNÍ STATISTIKY

1. URČENÍ TYPU ŠKÁLY (nominální, ordinální, metrické)

- a) nominální + ordinální \Rightarrow *neparametrické stat. metody*
- b) metrické \Rightarrow *parametrické statistické metody*

2. ROZLOŽENÍ ČETNOSTÍ ZNAKŮ (NORMÁLNÍ ČI JINÉ)

- a) normální \Rightarrow *parametrické statistické metody*
- b) jiné \Rightarrow *neparametrické statistické metody*

3. VÝPOČET ZÁKLADNÍCH STATISTICKÝCH CHARAKTERISTIK

- a) míry centrální tendence
- b) míry variability
- c) míry závislosti

2. DESKRIPTIVNÍ STATISTIKA

2.1 STATISTICKÉ TŘÍDĚNÍ DAT

Výsledkem měření, testování (statistického šetření) jsou *neuspořádané, neroztříděné a nepřehledné* statistické údaje

Hody na koš ($n=10$): **7; 6; 7; 8; 9; 8; 8; 8; 9; 10**

Chceme-li získat podrobnější informace, je třeba údaje uspořádat - tato činnost se nazývá *statistické zpracování (třídění) dat*. Nejjednodušším způsobem statistického zpracování dat je tzv. *tabulka rozdělení (rozložení) četností*.

2.1.1 JEDNOROZMĚRNÉ ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ

Je-li **JEDNA VLASTNOST** statistického souboru charakterizovaná **JEDNÍM STATISTICKÝM ZNAKEM**, hovoříme o *jednorozměrném statistickém souboru* (o *jednorozměrném rozdělení resp. rozložení četností*).

Konstrukce **tabulky** - postup vhodný pro:

(1) nespojité kvantitativní statistické znaky

(např. počet dětí v rodině, úspěšné koše),

(2) spojité statistické znaky s malým počtem výskytu

(např. pro statistické soubory s malým rozsahem).

PŘÍKLAD 1. Při *dvakrát opakovaném testování střelby na koš* byly u deseti osob ($n=10$) zjištěny výsledky uvedené v tabulce (zaznamenán počet úspěchů z deseti pokusů při 1. resp. 2. testování).

Tabulka (hrubé skóre)

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10

Pro znaky x_i sestavte (frekvenční) tabulku rozdělení četností.

Posouzení znaků x_i : kvantitativní, nespojitě, poměrová \Rightarrow ...

\Rightarrow ... tabulka jednorozměrného rozdělení četností.

Frekvenční tabulka jednorozměrného rozdělení četností.

X_i	Čárkovací metoda	n_i	f_i	Kumulativní četnost	
				N_i	F_i
6	/	1	0.1	1	0.1
7	//	2	0.2	3	0.3
8	////	4	0.4	7	0.7
9	//	2	0.2	9	0.9
10	/	1	0.1	10	1.0
Σ		10	1.0	-	-

Vysvětlivky:

n ...rozsah souboru x_i ...hodnota znaku

n_i ...absolutní četnost f_i ...relativní četnost ($f_i = n_i / n$)

N_i ... absolutní kumulativní četnost

F_i ... relativní kumulativní četnost

Absolutní četnost – vyjadřuje absolutní výskyt jednotlivých znaků, **relativní četnost** – vyjádření v procentech.

Kumulativní relativní četnost – vyjadřuje v % (po vynásobení stem) jaké procento rozsahu souboru má odpovídající variantu a menší hodnotu dané proměnné.

$F_i = 0,7 \Rightarrow 70\%$ hráčů dosáhlo výsledku **8 úspěšných pokusů a méně**.

X_i	Čárkovací metoda	n_i	f_i	Kumulativní četnost	
				N_i	F_i
6	/	1	0.1	1	0.1
7	//	2	0.2	3	0.3
8	////	4	0.4	7	0.7
9	//	2	0.2	9	0.9
10	/	1	0.1	10	1.0
Σ		10	1.0	-	-

2. 1. 2 JEDNOROZMĚRNÉ INTERVALOVÉ (SKUPINOVÉ) ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ

Konstrukce tabulky *jednorozměrného intervalového rozdělení četností* je postup vhodný pro:

(1) spojitě kvantitativní statistické znaky

(např. výsledky měření běhu na 100 m, tělesné výšky, skoku dalekého),



(2) nespojitě statistické znaky s velkým počtem výskytů.

DOPORUČENÁ PRAVIDLA

pro konstrukci tabulky jednorozměrného intervalového rozložení četností

URČENÍ ŠÍŘKY A POČTU INTERVALŮ

Variační rozpětí (R)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Šířka intervalu (h)

$$h = 0,08 \times R \quad h = (x_{\max} - x_{\min}) / k$$

Počet intervalů (k)

$$k = \sqrt{n}$$

$$k \leq 5 \cdot \log n$$

$$k \approx 1 + 3.3 \log n$$

(Sturgesovo pravidlo)

Je-li $n < 30$ doporučuje se vytvořit ne více než 6 intervalů.

Je-li $30 < n < 100$ doporučuje se vytvořit 7 až 10 intervalů.

POZOR !

*Intervaly musí být vytvořeny tak,
aby jeden statistický znak
nemohl být současně zařazen
do dvou různých intervalů!!!*

Intervaly na sebe musejí navazovat!!!



POZOR !

PŘÍKLAD 2. Pro znaky y_i sestavte tabulku skupinového (intervalového) rozdělení četností.

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10

Pomocné výpočty pro určení šířky (h) a počtu intervalů (k)

Variační rozpětí (R)

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

$$R = 10 - 4 = 6$$

Šířka intervalu (h)

$$h = 0,08 \times R$$

$$h = 0,08 \times 6 = 0,48 \approx 1 \text{ (pokus)}$$

PŘÍKLAD 2. Pro znaky y_i sestavte tabulku skupinového (intervalového) rozdělení četností.

Pomocné výpočty pro určení šířky (h) a počtu intervalů (k)

Počet intervalů (k)

$$k = \sqrt{n} \qquad k \leq 5 \cdot \log n \qquad k \approx 1 + 3.3 \log n$$

$$k = 3.16 \qquad k \leq 5 \qquad k \approx 4.3 (\log 10 = 1)$$

⇒ *Doporučená šířka intervalu: 1*

⇒ *Doporučený počet intervalů: 3 až 5*

Tabulka skupinového (intervalového)

rozdělení četností (znak y_i).

Třída	Interval	Střed	n_i	f_i	N_i	F_i
1	4 – 5	4,5	2	0,2	2	0,2
2	6 – 7	6,5	3	0,3	5	0,5
3	8 – 9	8,5	4	0,4	9	0,9
4	10 –	10,5	1	0,1	10	1,0
Σ	-	-	10	1,0	-	-

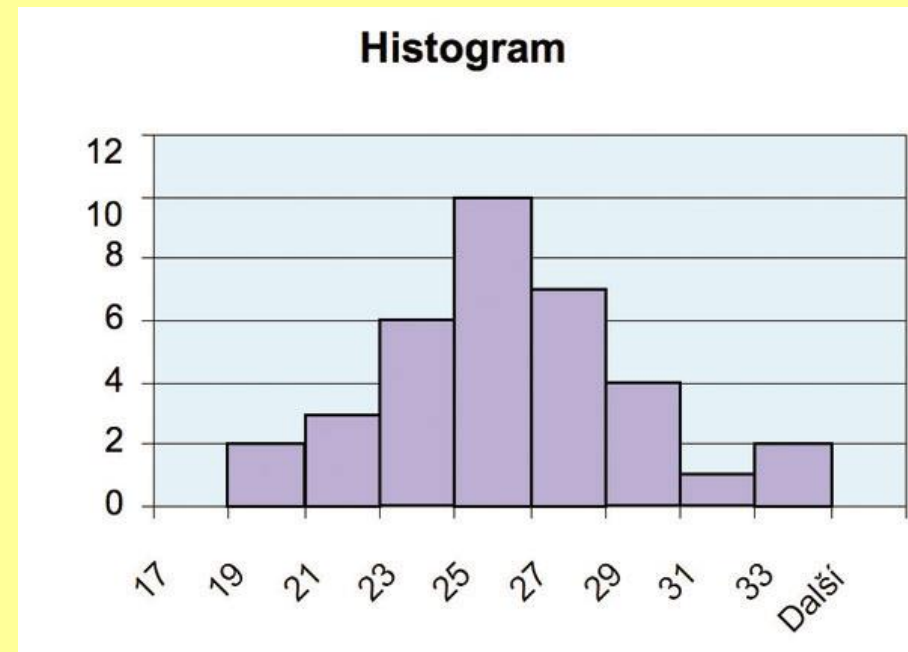
2. 1. 3 GRAFICKÉ ZNÁZORNĚNÍ ROZDĚLENÍ ČETNOSTÍ

Grafické znázornění = přehlednější a názornější forma znázornění *rozdělení četností*.

1) HISTOGRAM ČETNOSTÍ

(sloupkový diagram, sloupcový graf)

Histogram ... jedna z nejčastěji užívaných forem grafického znázornění *rozdělení četností*.

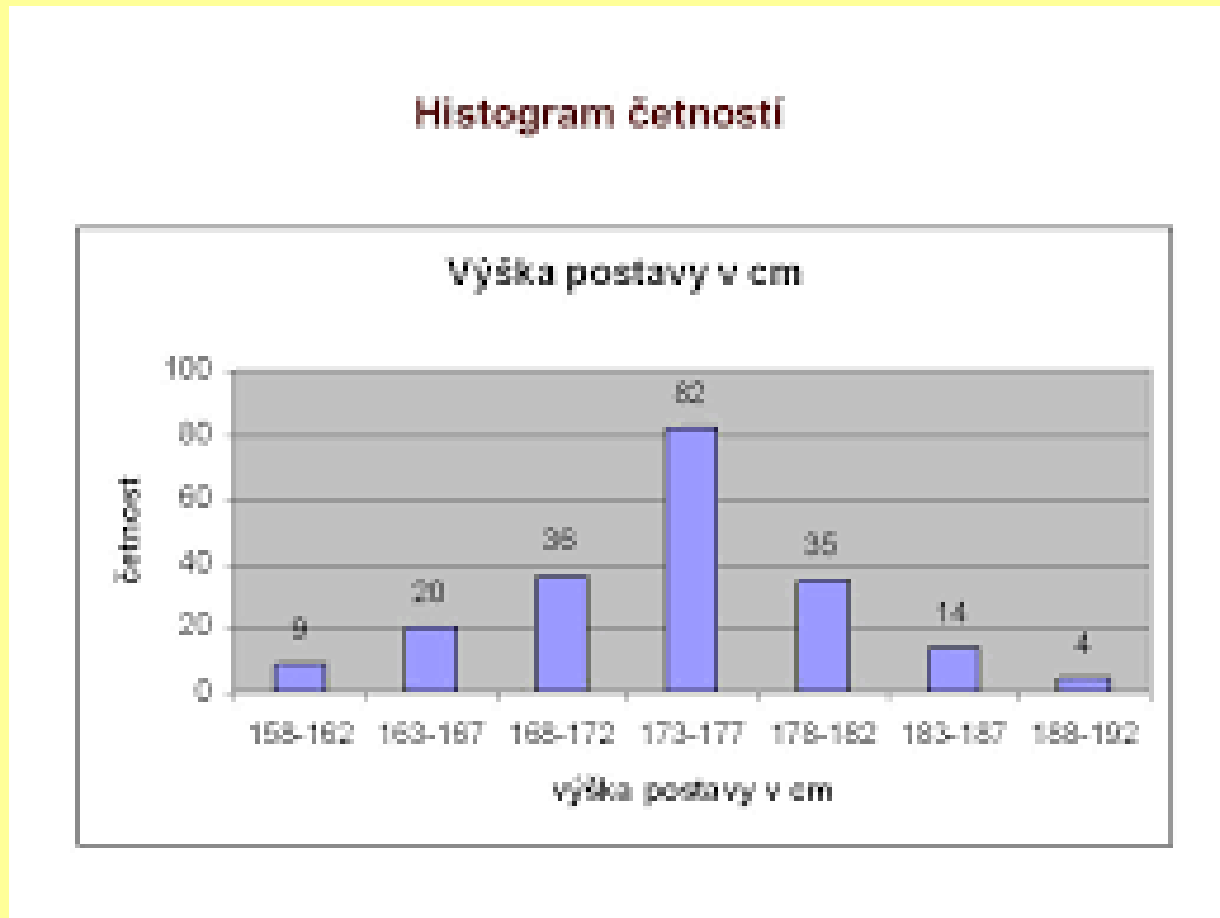


Histogram je tvořen sloupci

... jejich **šířka** odpovídá **šírce třídního intervalu**,

... jejich **výška** odpovídá **absolutní četnosti**

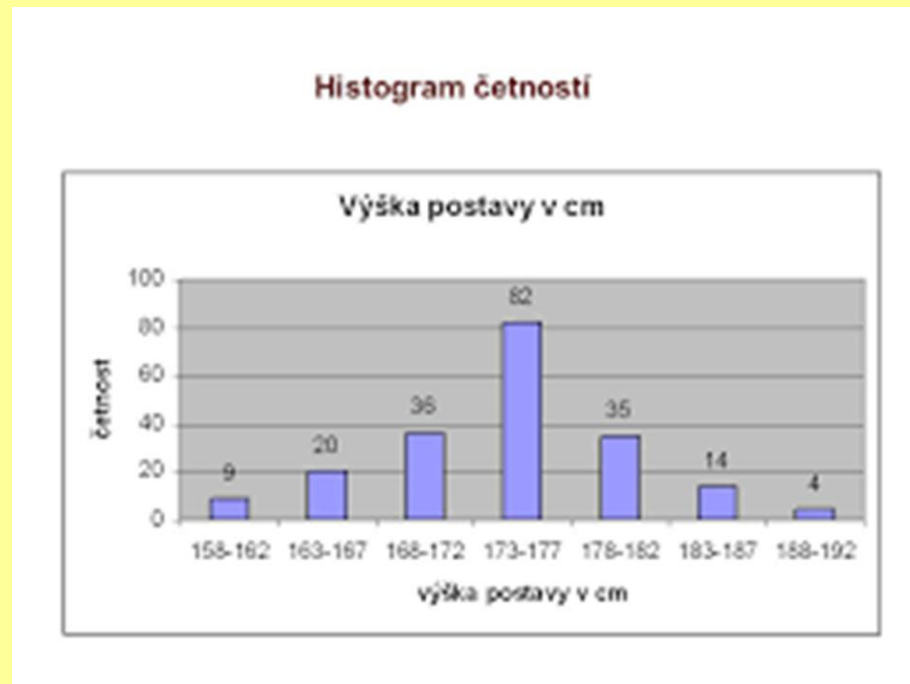
sledovaného statistického znaku.



2) (FREKVENČNÍ) POLYGON

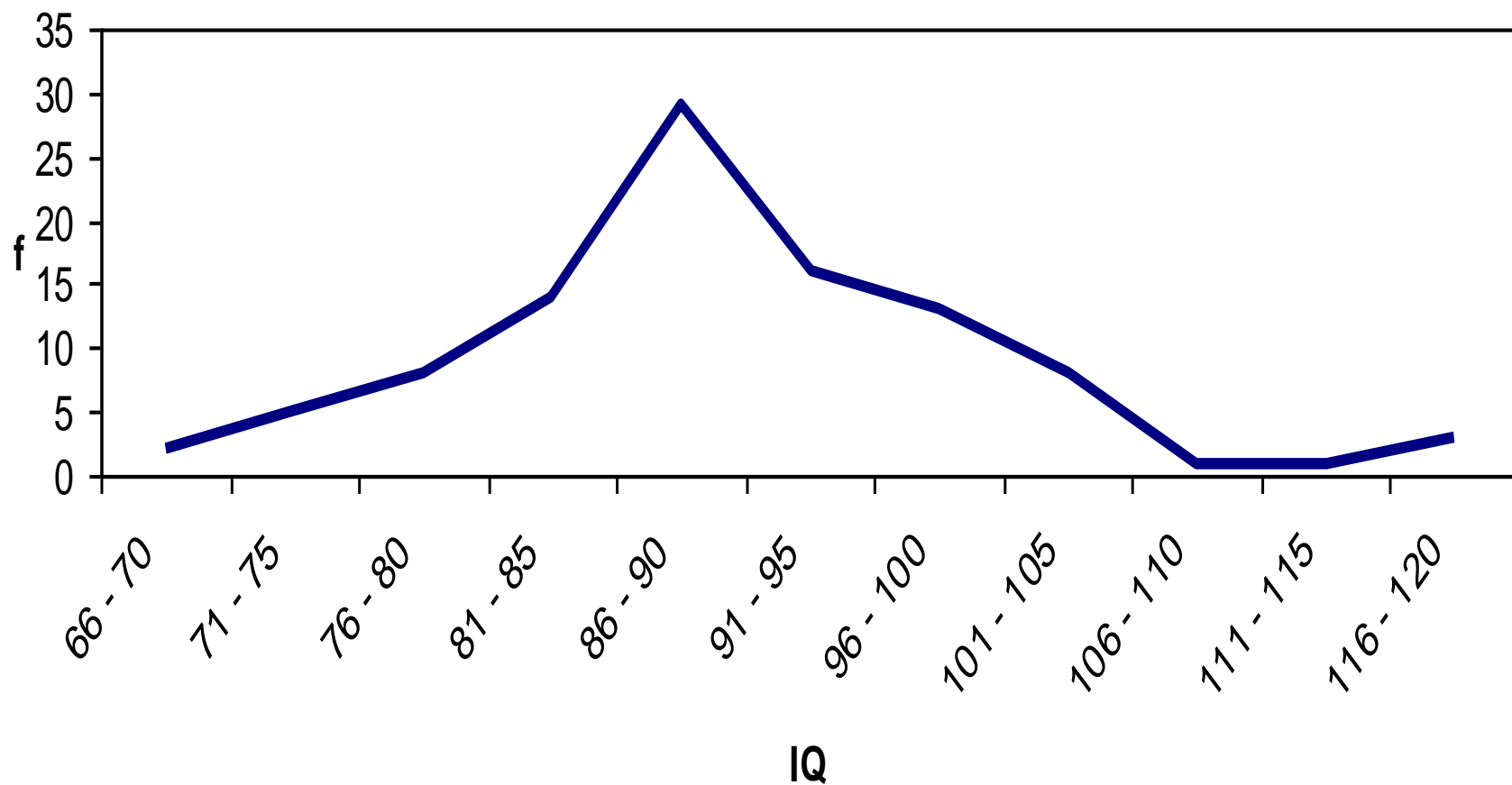
Forma grafického znázornění rozdělení četností, kdy *místo sloupců* použijeme ke znázornění rozdělení četností *lomenou čáru*.

Tato lomená čára je *spojnice bodů* vytvořených v průsečících *středů intervalů* a *příslušných četností*.



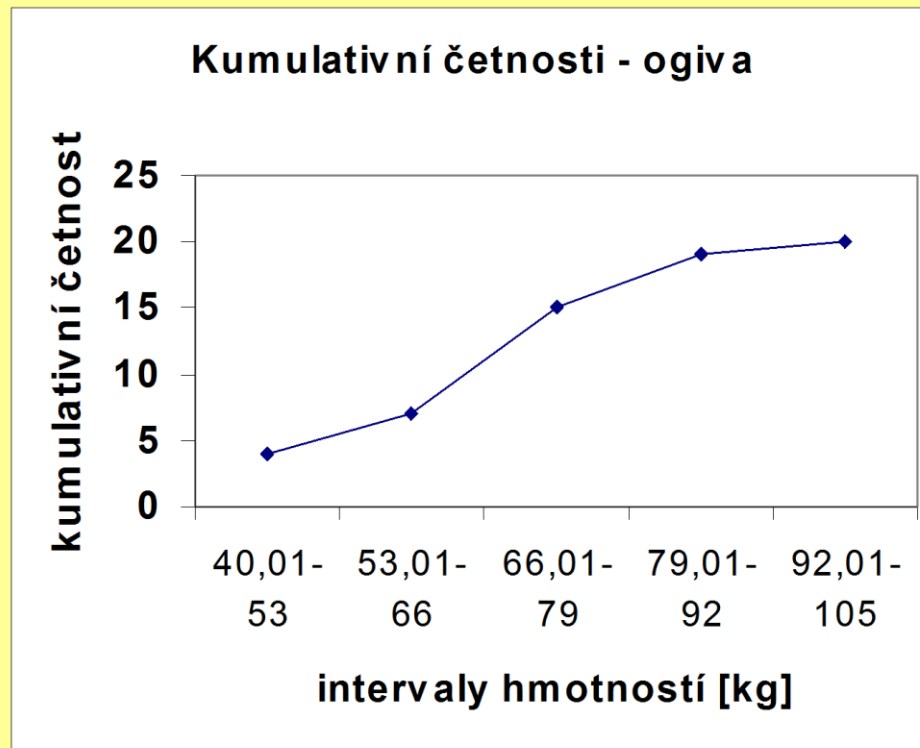
2) (FREKVENČNÍ) POLYGON

Frekvenční polygon inteligence citově deprivovaných dětí



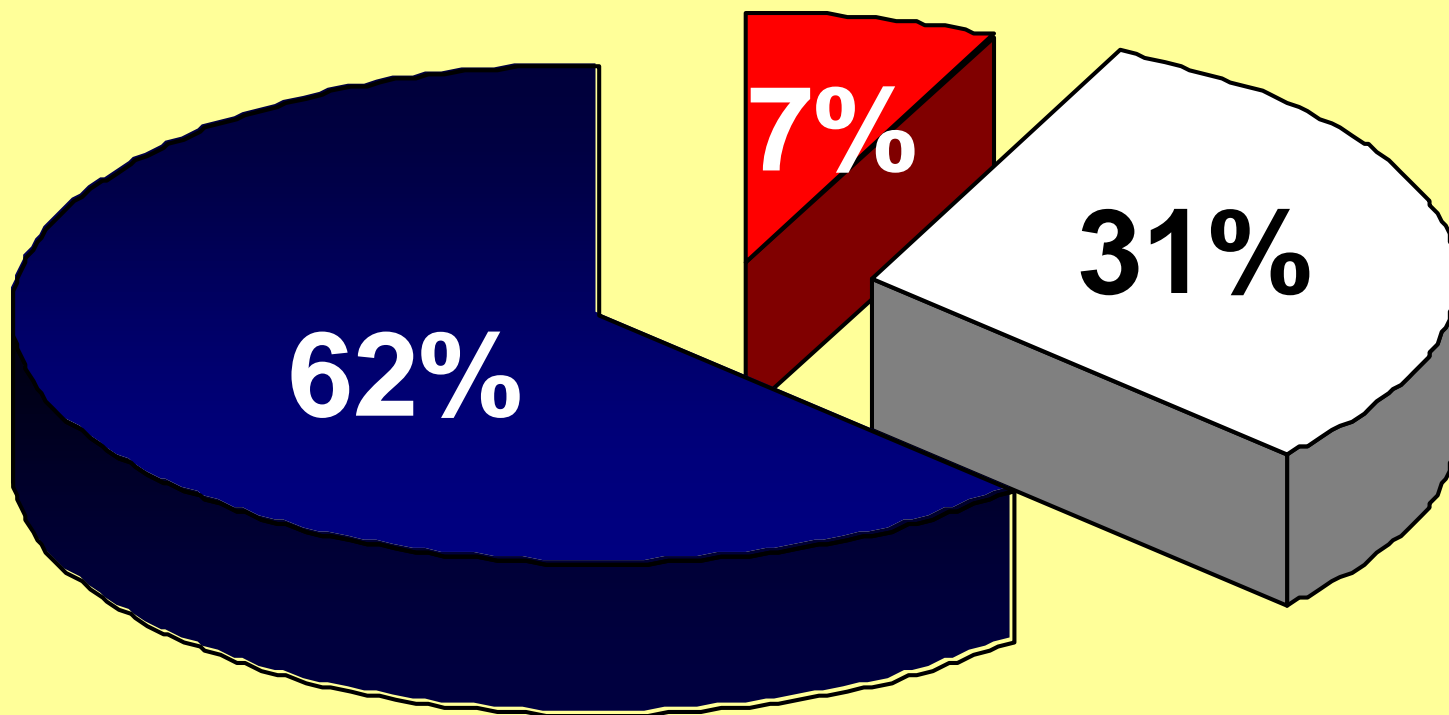
3) (GALTONOVA) OGIVA

Pojem *ogival* je v architektuře používán pro lomený oblouk, ve statistice tento pojem charakterizuje *esovitě lomenou křivku* znázorňující *kumulativní četnosti* (absolutní nebo relativní).



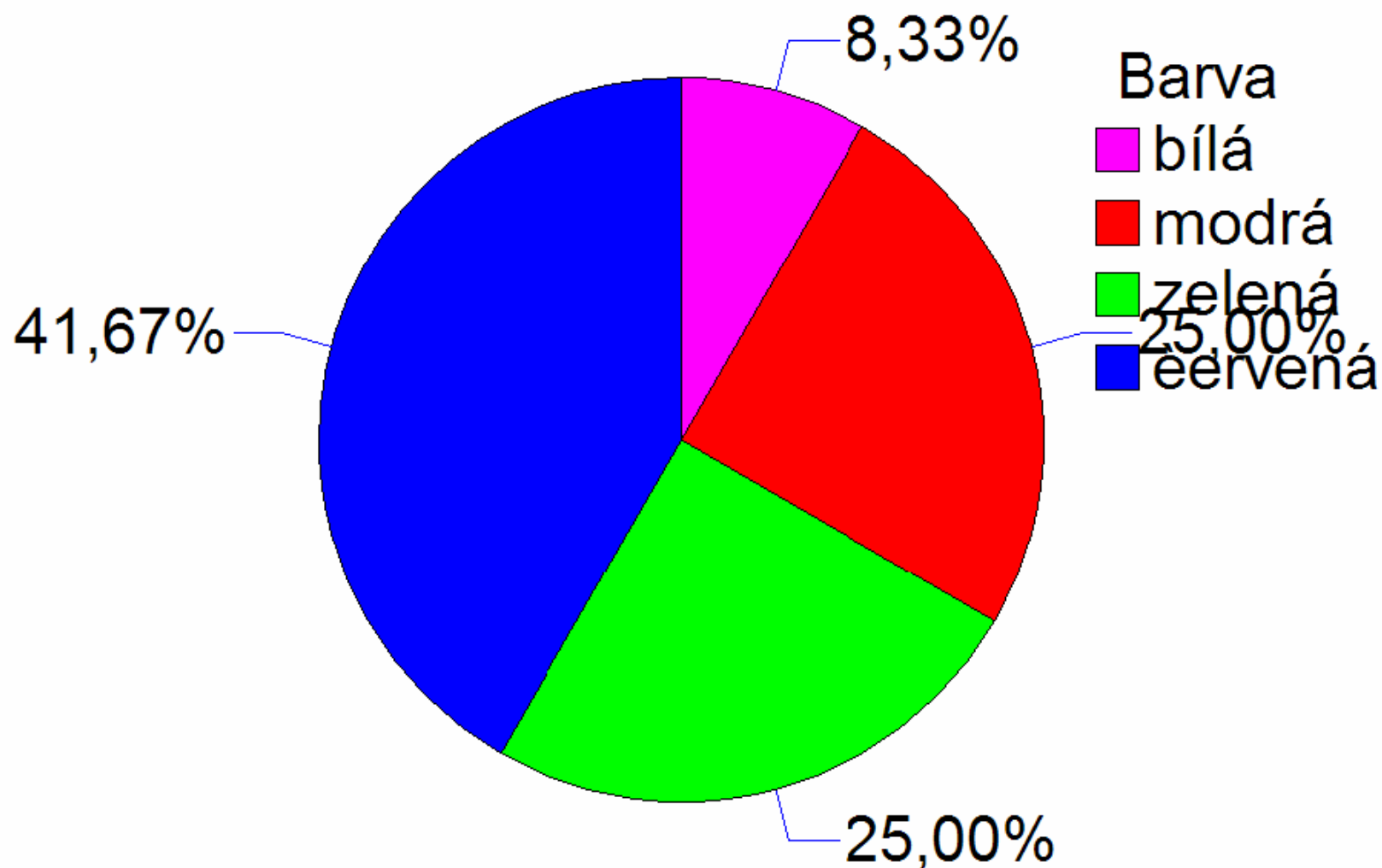
4) VÝSEČOVÝ (SEKTOROVÝ) GRAF

Jedná se o *kruhový graf*, vyjadřující *relativní četnosti* jako charakteristiku struktury daného souboru (nejčastěji v %).



4) VÝSEČOVÝ (SEKTOROVÝ) GRAF

Piechart for Barva



5) PIKTOGRAM

Piktogram = grafický znak znázorňující *pojem* nebo *sdělení* obrazově (např. dopravní značky), též **piktograf**. Vyjadřuje **absolutní četnosti** bez nároků na přesnost, má spíše informativní charakter a používá obrazových symbolů (např. lokomotiva, váček s penězi, postava vojáka).

Spotřeba energie v městě X v letech

1960



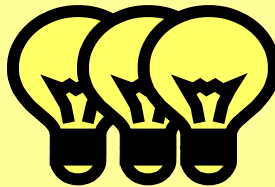
10 MW

1970



22 MW

1980



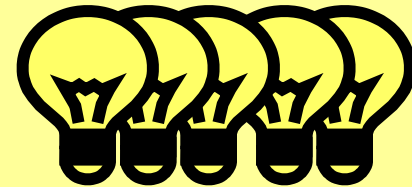
28 MW

1990



43 MW

2000



52 MW

Pro znaky y sestavte tabulku skupinového (intervalového) rozdělení četností.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Hráč	yi									
2	A	4		5							
3	B	8		7							
4	C	6		9							
5	D	8									
6	E	7									
7	F	8									
8	G	7									
9	H	4									
10	J	8									
11	K	10									
12											
13											
14											
15											

Histogram

Vstup

Vstupní oblast: \$B\$2:\$B\$11

Hranice tříd: \$D\$2:\$D\$4

Popisky

Možnosti výstupu

Výstupní oblast:

Nový list:

Nový sešit

Pareto (tříděný histogram)

Kumulativní procentuální podíl

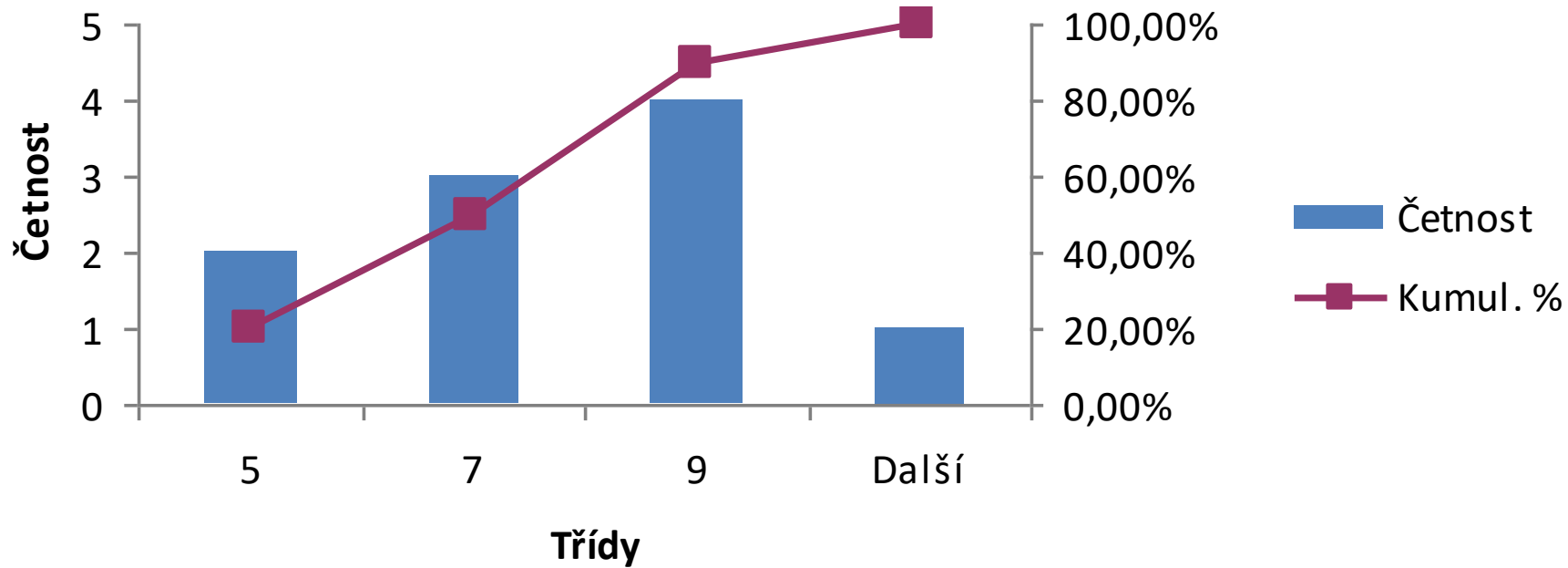
Vytvořit graf

OK Storno Nápořádá

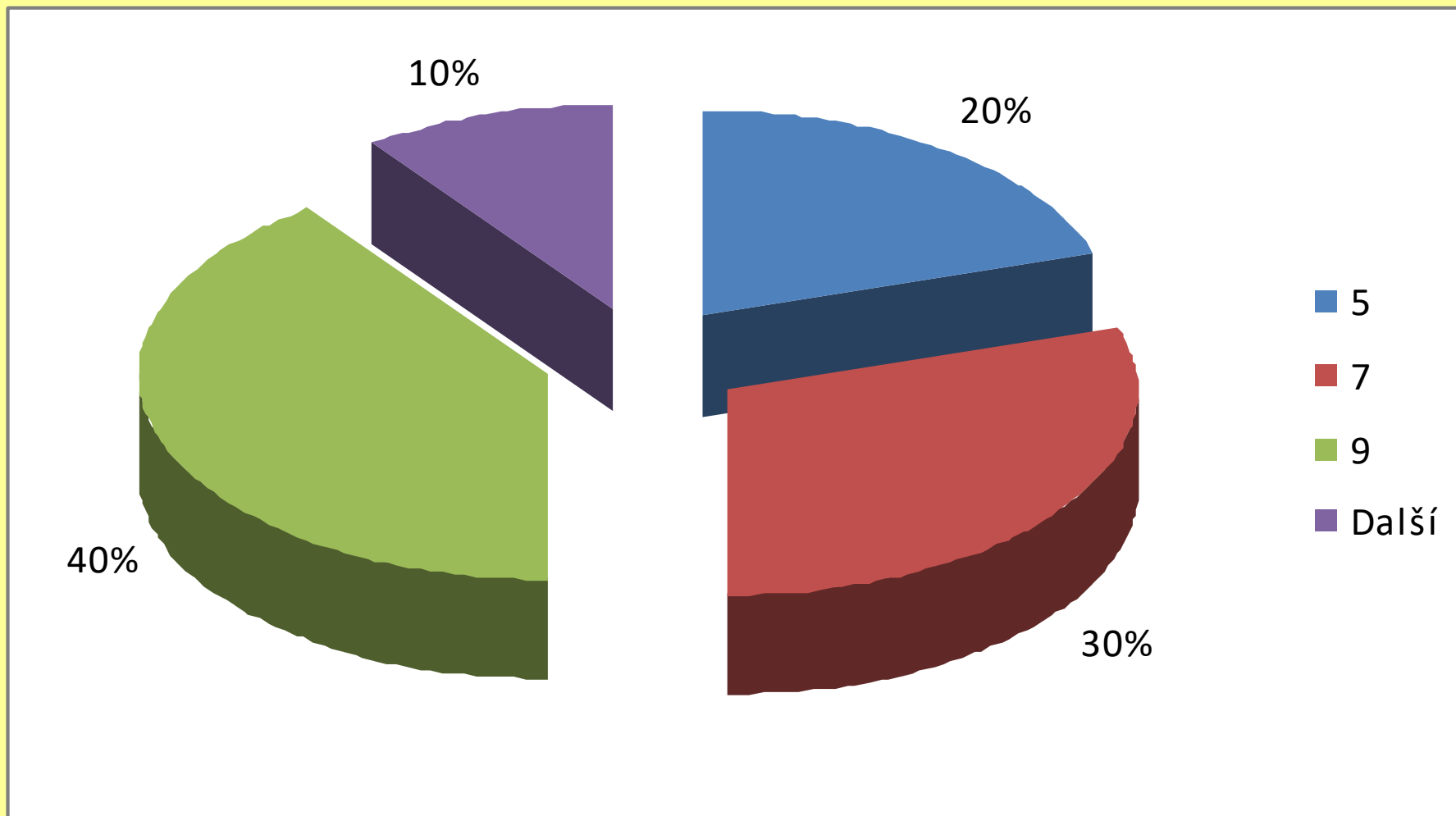
<i>Třídy</i>	<i>Četnost</i>	<i>Kumul. %</i>
5	2	20,00%
7	3	50,00%
9	4	90,00%
Další	1	100,00%

Histogram četností

Histogram



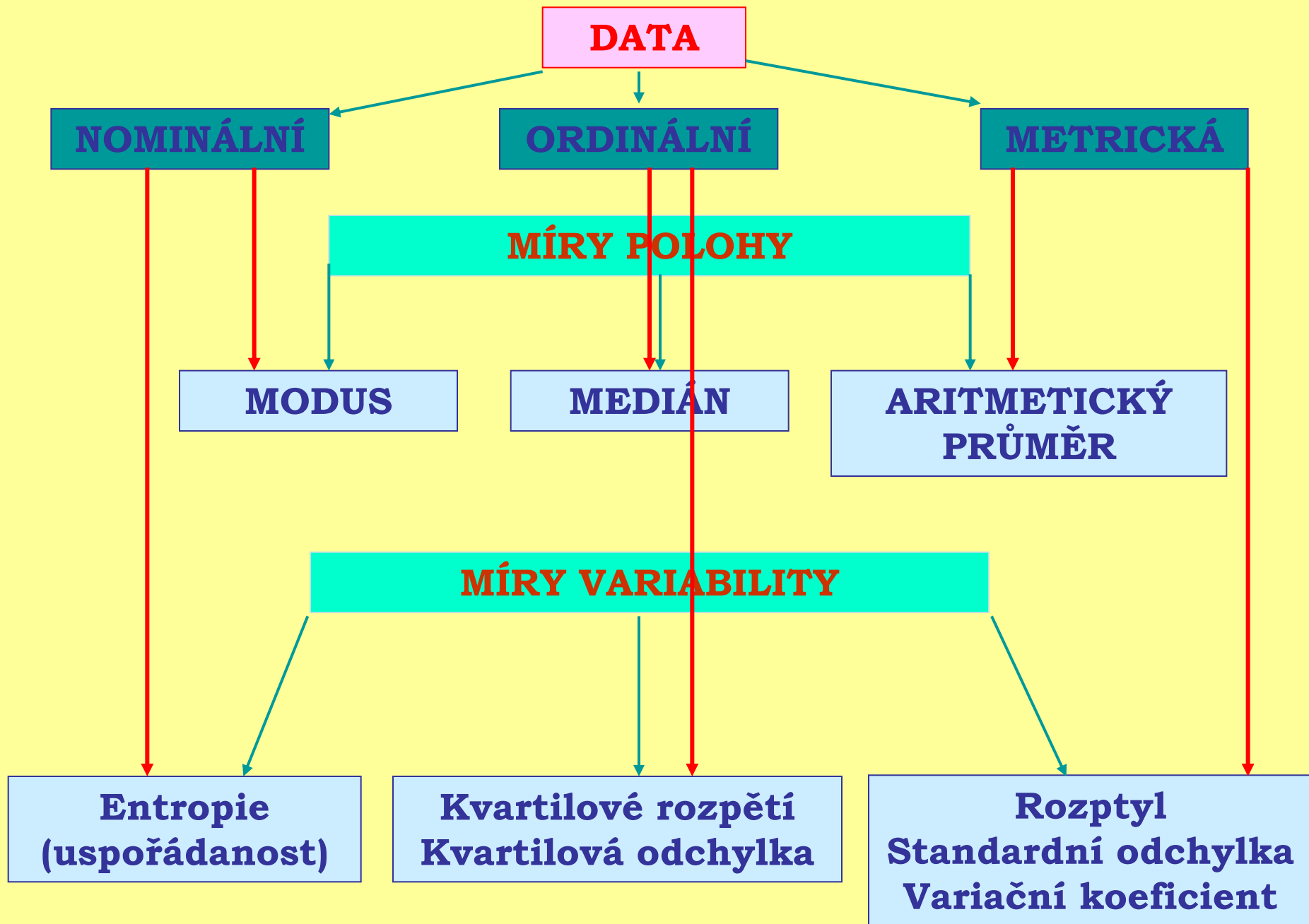
Výsečový (sektorový) graf



ZÁKLADNÍ STATISTICKÉ CHARAKTERISTIKY

PRO DATA ZÍSKANÁ NA ŠKÁLE

NOMINÁLNÍ, ORDINÁLNÍ, METRICKÉ



2. 2 MÍRY POLOHY

Míry polohy (neboli míry centrální tendence) charakterizují **úroveň** statistického souboru z hlediska **jeho střední hodnoty,**

...zevšeobecňují, zastupují, reprezentují jednotlivé hodnoty sledovaného statistického znaku,

...umožňují srovnání polohy dvou či více rozdělení četností, resp., **srovnání střední úrovně** dvou či více souborů.



Hod na koš (n=10): 6; 7; 7; 8; 8; 8; 8; 9; 9; 10

NEJČASTĚJI POUŽÍVANÉ MÍRY POLOHY

1. NOMINÁLNÍ STUPNICE (DATA)

MODUS (Mo) označuje *nejčastěji se vyskytující* hodnotu statistického souboru (hodnota s největší četností).

Modus je nejsnáze zjistitelná míra polohy.

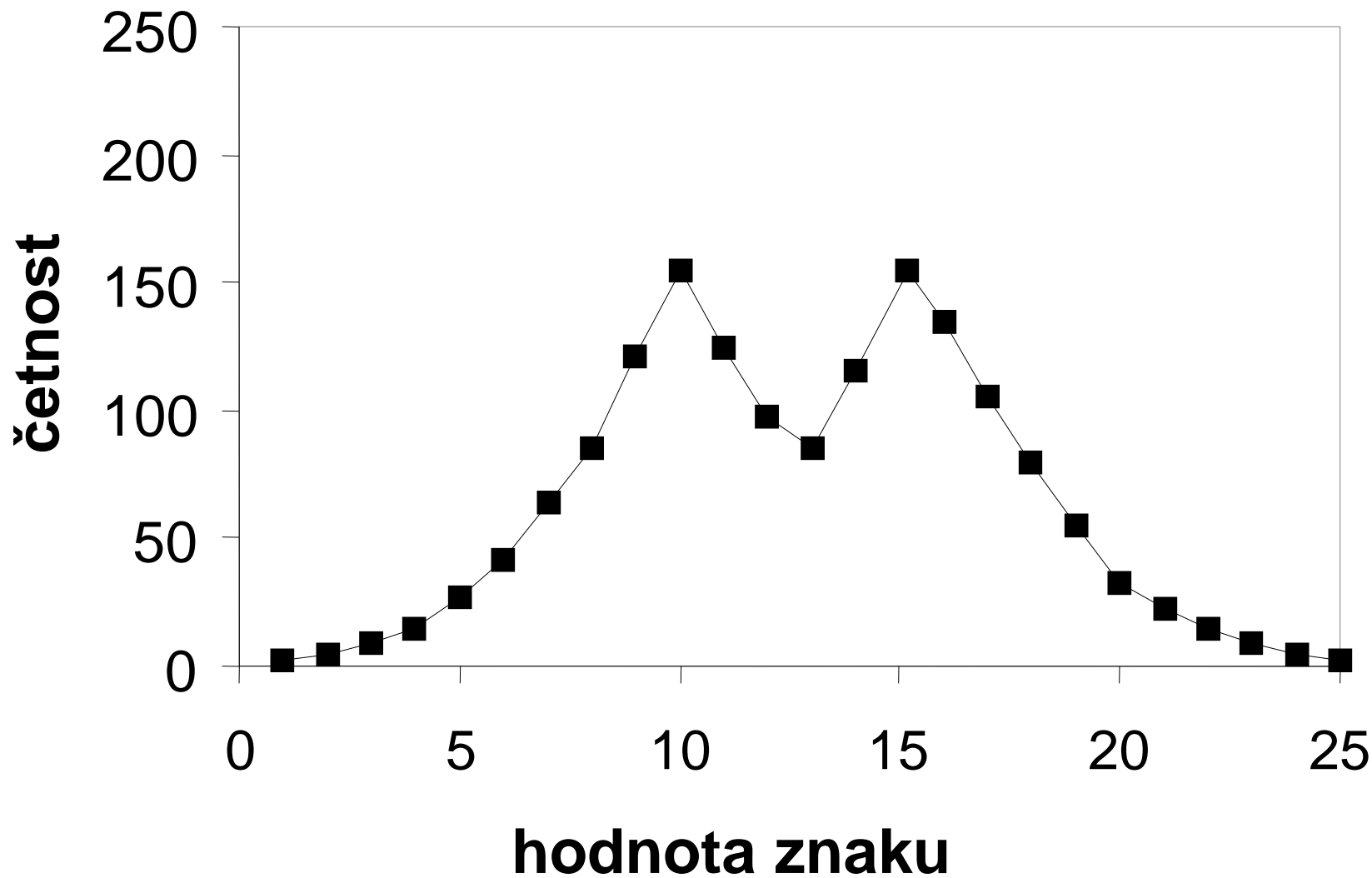
Soubor může mít jeden či více modů

(soubor bimodální, soubor trimodální).

Modus je použitelný pro nominální stupnice

(a všechny vyšší).

Rozdělení bimodální



2. ORDINÁLNÍ STUPNICE (DATA)

MEDIÁN (Me) označuje *prostřední člen variační řady* (dělí výsledky seřazené podle velikosti na polovinu).

Medián není citlivý na velikost krajních hodnot.

Medián je použitelný pro ordinální stupnici (a vyšší).

Ukázka výpočtu pro sudý a lichý počet dat:


 $x_i : 6 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 10$ (sudý počet) **Mo = 8** **Me = 8**


 $x_i : 6 \ 7 \ 7 \ 8 \ 8 \ 8 \ 8 \ 9 \ 9 \ 10 \ 10$ (lichý počet)

3. METRICKÉ STUPNICE (DATA)

ARITMETICKÝ PRŮMĚR = nejpoužívanější míra polohy.

Použitelný (pouze!) pro metrické škály (stupnice).

Výpočet: součet všech hodnot statistického souboru dělený rozsahem souboru (n).

a) aritmetický průměr prostý (jednoduchý) \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

X - statistický znak

n - rozsah souboru

X_i - hodnota statistického znaku - pozorování

b) vážený aritmetický průměr

- užívá se u početnějších souborů, výpočet vychází z rozdělení četností,
- **vážený** se nazývá proto, že jednotlivým hodnotám znaku je přisuzována **váha** odpovídající počtu výskytů.

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m}{w_1 + w_2 + \dots + w_m} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i w_i}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

w_i ... váha (počet výskytů)

n ... rozsah souboru (počet hodnot).

$$n = \sum_{i=1}^m w_i$$

b) aritmetický průměr vážený - příklad

Přijímací řízení FTK 1991 – 1993

Výsledky testu běh na 100m

1991 (n = 350)	AP = 13,0
1992 (n = 230)	AP = 12,5
1993 (n = 120)	AP = 12,0

Jaký je průměrný výkon v běhu na 100 m v letech 1991 – 1993?

??? 13,0 + 12,5 + 12,0 = 37,5/3 = 12,5 ???

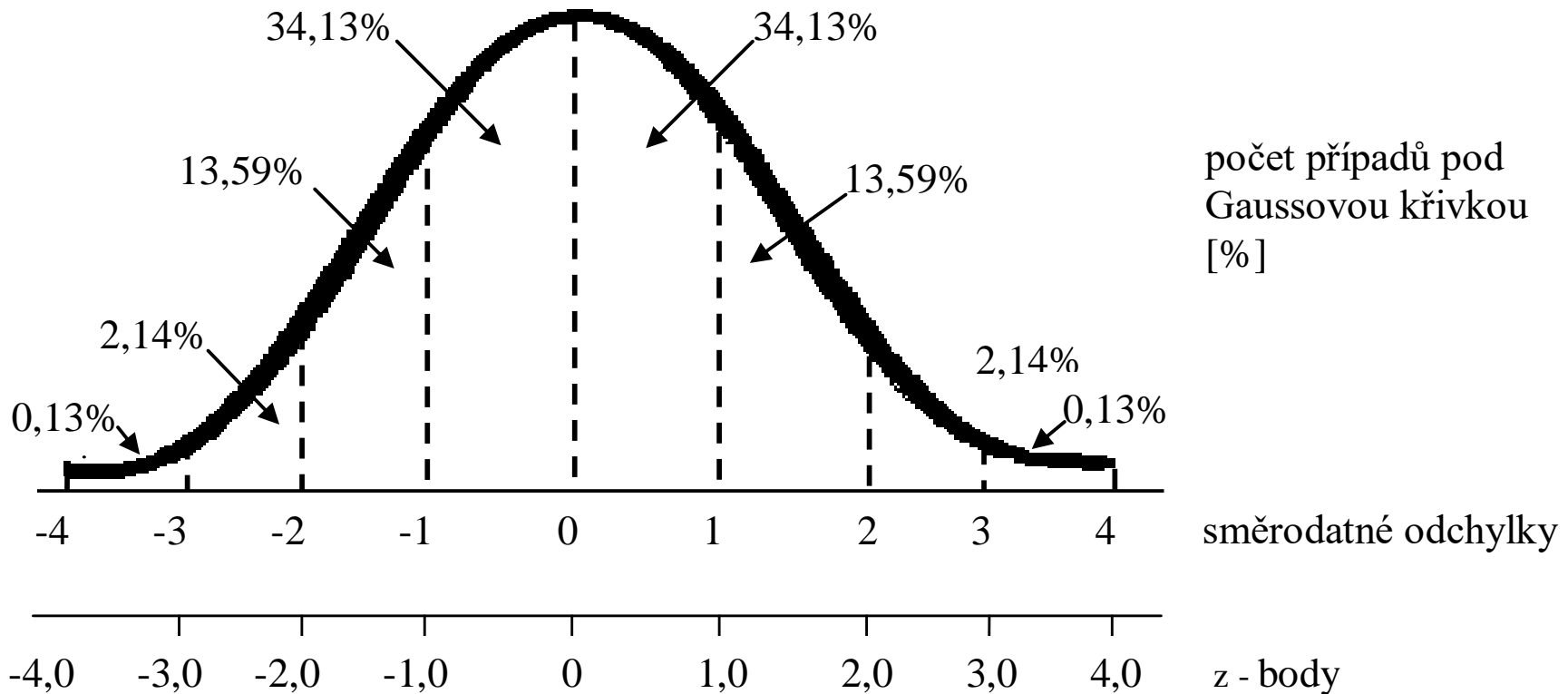
$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m}{w_1 + w_2 + \dots + w_m} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i w_i}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

$$13,0 \times 350 + 12,5 \times 230 + 12,0 \times 120$$

$$\text{AP} = \frac{13,0 \times 350 + 12,5 \times 230 + 12,0 \times 120}{350 + 230 + 120} = 12,66$$

Poznámky

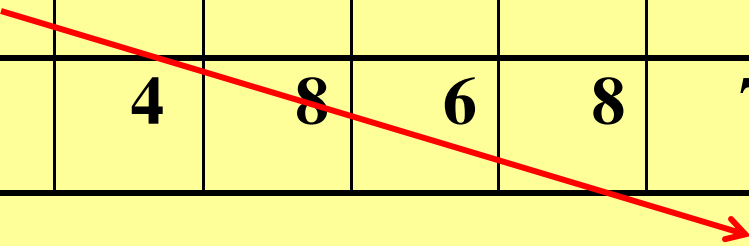
- v tzv. **Gaussově normálním rozložení** (rozdělení) **četností** (symetrickém) jsou hodnoty aritmetického průměru, modu a mediánu **stejně velké**.
- čím více se od sebe tyto **hodnoty liší**, tím více je rozdělení četností **asymetrické** (hovoříme o porušené normalitě rozložení četností).



PŘÍKLAD 3

Výpočet: modus, medián, aritmetický průměr.

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10



Variální řada znaku x_i : 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10

$Mo = ?$ $Me = ?$ $AP = ?$ Vážený $AP = ?$

$Mo = 8$ $Me = 8$ $AP = 8$ Vážený $AP = 8$

SAMI: Variální řada znaku y_i : 4, 8, 6, 8, 7, 8, 7, 4, 8, 10

$Mo = ?$ $Me = ?$ $AP = ?$ Vážený $AP = ?$

$Mo = 8$ $Me = 7,5$ $AP = 7$ Vážený $AP = 7$

Pomocí Excelu – Statistické funkce

Výpočet: modus, medián, aritmetický průměr.

	A	B	C
1	Hráč	yi	
2	A	4	
3	B	8	
4	C	6	
5	D	8	
6	E	7	
7	F	8	
8	G	7	
9	H	4	
10	J	8	
11	K	10	
12			
13			
14			
15			

MODE

MEDIAN

PRŮMĚR

Argumenty funkce

MODE

Číslo1 B2:B11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Číslo2 = matice

= 8

Vrátí hodnotu, která se v matici nebo v oblasti dat vyskytuje nejčastěji.

Číslo1: číslo1;číslo2;... je 1 až 255 čísel nebo názvů, matic či odkazů obsahujících čísla, jejichž modus chcete zjistit.

Výsledek = 8

[Nápověda k této funkci](#)

OK Storno

Argumenty funkce

MEDIAN

Číslo1 B2:B11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Číslo2 = číslo

= 7,5

Vrátí medián, střední hodnotu množiny zadaných čísel.

Číslo1: číslo1;číslo2;... je 1 až 255 čísel, názvů, matic nebo odkazů obsahujících čísla, jejichž medián chcete zjistit.

Výsledek = 7,5

[Nápověda k této funkci](#)

OK

Argumenty funkce

PRŮMĚR

Číslo1 B2:B11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Číslo2 = číslo

= 7

Vrátí průměrnou hodnotu (aritmetický průměr) argumentů. Argumenty mohou být čísla či názvy, matice nebo odkazy, které obsahují čísla.

Číslo1: číslo1;číslo2;... je 1 až 255 číselných argumentů, jejichž průměrnou hodnotu chcete zjistit.

Výsledek = 7

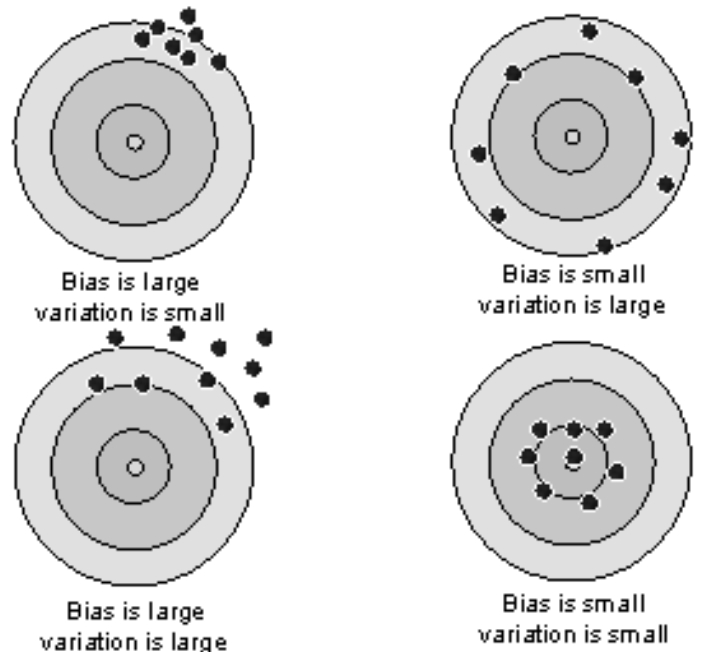
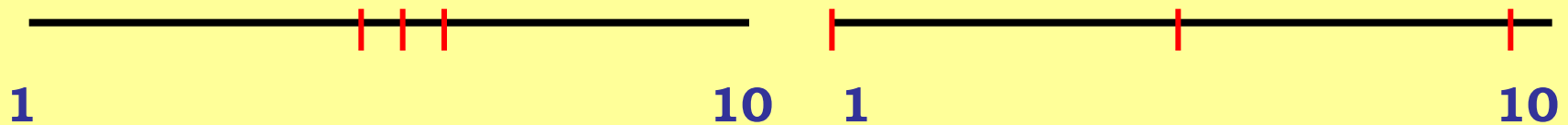
[Nápověda k této funkci](#)

OK Storno

2. 3 MÍRY VARIABILITY

Popis statistického souboru pomocí **měr polohy** (tedy **určení středních hodnot**) není dostačující - viz příklad!

Př. 1: **4, 5, 6** $\Rightarrow 15/3=5$ (AP 1) Př. 2: **1, 5, 9** $\Rightarrow 15/3=5$ (AP 2)



Accuracy versus Quality of an Estimator Using Bias and Variation as Measurable Quantities Respectively

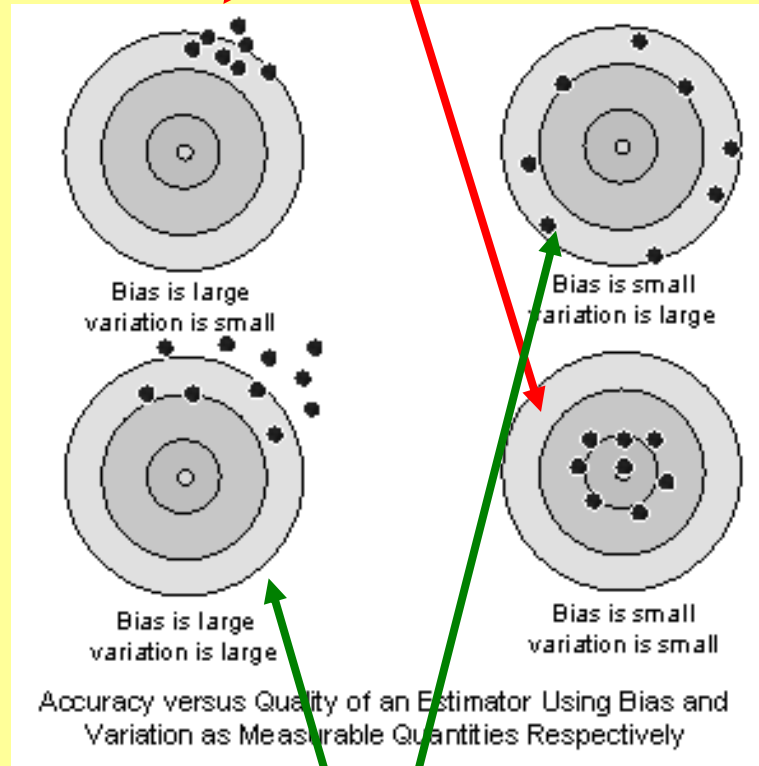
MÍRY VARIABILITY

Míry variability, tedy přinášejí další důležité informace o vlastnostech souboru, v odborné literatuře jsou též označovány jako *míry variace, rozptýlení, měnlivosti*.

Vlastnosti variability:

- charakterizují **vyrovnanost** jednotek souboru,
- ukazují, jak jsou **hodnoty souboru rozptýleny**, tedy jak se jednotlivé hodnoty znaku **vzájemně liší**.
- umožňují posoudit, do jaké míry je sledovaný soubor **homogenní** (stejnorodý) resp. **heterogenní** (nestejnorodý, různorodý).

Soubor homogenní



Soubor heterogenní

2. 3. 1 KVANTILOVÉ MÍRY VARIABILITY

KMV jsou využitelné pro **stupnice ordinální** a dále pro **stupnice metrické** v případech, kdy nelze prokázat normalitu rozložení četností dat (*proč ne pro nominální stupnice?*).

NEJČASTĚJI POUŽÍVANÉ KVM

VARIAČNÍ ŘADA = znaky statistického souboru seřazené podle velikosti.

VARIAČNÍ ROZPĚTÍ =diference mezi **největší** a **nejmenší** hodnotou znaku statistického souboru tj. $R = x_{\max} - x_{\min}$

KVANTIL=hodnota kvantitativního statistického znaku, která **rozděluje (láme) variační řadu** na jisté části.

PŘÍKLAD 4 Výpočet: variační řada, variační rozpětí.

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10

VARIAČNÍ ŘADA znaků $x_i \Rightarrow 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10$

VARIAČNÍ ROZPĚTÍ $R = x_{\max} - x_{\min} \Rightarrow R = 10 - 6 = 4$

Sami totéž pro znaky y_i

VARIAČNÍ ŘADA znaků $y_i \dots 4, 4, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 10$

VARIAČNÍ ROZPĚTÍ $R = x_{\max} - x_{\min} \Rightarrow R = 10 - 4 = 6$

DRUHÝ KVANTILŮ (kvartil, decil, percentil)

1. KVARTIL (Y) ... kvartily rozdělují variační řadu na čtvrtiny, na 4 skupiny.

KOLIK MÁME KVARTILŮ?

Dolní kvartil (Q_1 , x_{25})

Horní kvartil (Q_3 , x_{75})

(Střední kvartil) = medián



VÝPOČET KVANTILŮ

$$z_p = \frac{n \cdot p}{100} + 0,5$$

z_p - pořadí kvantilu x_p
 n - rozsah souboru

Příklad : Urči dolní kvartil x_{25} , přičemž počet hodnot v souboru je $n = 40$.

$$z_p = \frac{40 \cdot 25}{100} + 0,5 = 10,5$$

tzn., že 10,5 hodnota (resp. průměr desáté a jedenácté hodnoty) v uspořádaném souboru představuje dolní kvartil x_{25}

$$x_{25} = \frac{x_{(10)} + x_{(11)}}{2}$$

2. DECIL

... decily **rozdělují variační řadu na desetiny**, na 10 skupin o 10% rozsahu souboru.

Označují se $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{90}$

3. PERCENTIL (PROCENTIL)

...percentily **rozdělují variační řadu na setiny**, na 100 skupin o 1% rozsahu. Označují se x_1, x_2, \dots, x_{99}

DALŠÍ KVANTILOVÉ CHARAKTERISTIKY VARIABILITY

KVANTILOVÉ ROZPĚTÍ

➤ kvartilové rozpětí $x_{75} - x_{25}$

➤ decilové rozpětí $x_{90} - x_{10}$

➤ percentilové rozpětí $x_{99} - x_1$

KVANTILOVÉ ODCHYLKY

a) kvartilová odchylka

$$Q = \frac{x_{75} - x_{25}}{2}$$

Měří varianci lépe než variační rozpětí, není ovlivněna extrémny.

b) decilová odchylka

$$Q = \frac{x_{90} - x_{10}}{2}$$

Je osminou rozpětí krajních decilů, záleží tedy na rozpětí prostředních 80% prvků souboru.

c) percentilová odchylka

$$Q = \frac{x_{99} - x_1}{2}$$

Je devadesátiosminou rozpětí krajních percentilů.

2. 3. 2 MOMENTOVÉ MÍRY VARIABILITY

Předchozí (kvantilové) míry variability udávají **jen rozpětí, v němž se znaky pohybují.**

Vhodnějšími mírami variability jsou **momentové míry variability** (pokud je ovšem možné je vypočítat).

Jsou to takové charakteristiky, které udávají ...

(1) variaci ve smyslu **vzájemné odlišnosti jednotlivých hodnot znaku** (mezi sebou),

(2) variaci ve smyslu **odlišnosti jednotlivých hodnot znaku od průměru.**

NEJČASTĚJI POUŽÍVANÉ MOMENTOVÉ MÍRY VARIABILITY

1. ROZPTYL $s^2 = \frac{\sum (x_i - AP)^2}{n}$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

(pro rozsáhlé soubory)

AP...aritmetický průměr

x_i ...hodnota znaku

Rozptyl (s^2) ... je aritmetickým průměrem ze čtverců odchylek jednotlivých hodnot znaku od jejich aritmetického průměru.

Rozptyl „měří“ variaci ve smyslu odlišnosti jednotlivých hodnot znaku *od průměru* i ve smyslu vzájemné odlišnosti *jednotlivých hodnot znaku*.

2. SMĚRODATNÁ (STANDARDNÍ) ODCHYLKA (s)

Symbolický tvar

$$s = \sqrt{s^2 \text{ (var } \mathbf{x})}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (\mathbf{x}_i - AP)^2}{n}}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

(pro rozsáhlé soubory)

Směrodatná odchylka (s)

... je kvadratickým průměrem odchylek jednotlivých hodnot znaku od aritmetického průměru.

3. VARIČNÍ KOEFICIENT

$$V = \frac{s}{|AP|}$$

$$V = 100 \times \frac{s}{|AP|}$$

Variační koeficient ...

- umožňuje provést *srovnání variability dvou či více souborů*, jejichž znaky jsou měřeny v různých jednotkách (cm, kg, sekundy, ...),
- udává *poměr směrodatné odchylky k aritmetickému průměru*, přesněji řečeno udává, *kolik % aritmetického průměru tvoří směrodatná odchylka*.

PŘÍKLAD 5

Výpočet: rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10

(1) Rozptyl

AP=8

$$s^2 = \frac{(7-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + \dots + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2}{10}$$
$$= \frac{1+4+1+0+1+0+0+0+1+4}{10} = \frac{12}{10} = 1,20$$

(2) Směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{s^2} = 1,09 = 1,1$$

Sami – směrodatná odchylka znaků $y_i \dots$

Variační koeficient V_1

$$V_1 = \frac{s}{AP} = \frac{1,09}{8} = 0,14 \quad \text{resp.} \quad V_1 = \frac{s}{AP} \cdot 100 = 14 \%$$

Sami - variační koeficient V_2 tj. znaků $y_i \dots$

$$V_2 = 0,26 \quad \text{resp.} \quad V_2 = 26 \% \quad \Rightarrow \quad V_1 < V_2$$

Interpretace ...

Pomocí Excelu – Statistické funkce

Výpočet: rozptyl, směrodatná odchylka, variační koeficient

	A	B	C
1	Hráč	yi	
2	A	4	
3	B	8	
4	C	6	
5	D	8	
6	E	7	
7	F	8	
8	G	7	
9	H	4	
10	J	8	
11	K	10	

VAR

SMODCH

Argumenty funkce

VAR

Číslo1 B2:B11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Číslo2 = číslo

= 3,2

Vypočte rozptyl základního souboru (přeskočí logické hodnoty a text v základním souboru).

Číslo1: číslo1;číslo2;... je 1 až 255 argumentů odpovídajících základnímu souboru.

Výsledek = 3,2

OK Storno

Argumenty funkce

SMODCH

Číslo1 B2:B11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Číslo2 = číslo

= 1,788854382

Vypočte směrodatnou odchylku základního souboru, který byl zadán jako argument (přeskočí logické hodnoty a text).

Číslo1: číslo1;číslo2;... je 1 až 255 čísel nebo odkazů obsahujících čísla, které odpovídají základnímu souboru.

Výsledek = 1,788854382

[Nápověda k této funkci](#)

OK Storno

VAR.VÝBĚR

vypočte rozptyl výběru

SMODCH.VÝBĚR

vypočte směrodatnou odchylku výběru

Pomocí Excelu – Analýza dat – Popisná statistika

	A	B	C
1	Hráč	y_i	
2	A	4	
3	B	8	
4	C	6	
5	D	8	
6	E	7	
7	F	8	
8	G	7	
9	H	4	
10	J	8	
11	K	10	

Popisná statistika

Vstup
 Vstupní oblast:

Sdružit: Sloupce Řádky

Popisky v prvním řádku

Možnosti výstupu
 Výstupní oblast:
 Nový list:
 Nový sešit

Celkový přehled

Hladina spolehlivosti pro stř. hodnotu: %

K-té největší:

K-té nejmenší:

OK Storno Nápořáděda

	y_i
Stř. hodnota	7
Chyba stř. hodnoty	0,596285
Medián	7,5
Modus	8
Směr. odchylka	1,885618
Rozptyl výběru	3,555556
Špičatost	-0,05776
Šikmost	-0,49718
Rozdíl max-min	6
Minimum	4
Maximum	10
Součet	70
Počet	10
Největší (1)	10
Nejmenší (1)	4
Hladina spolehlivosti (95,0%)	1,34889

Pomocí Excelu – Analýza dat – Popisná statistika

Tab. 1 Základní statistické charakteristiky sledovaných proměnných (Female, 9–10.9 let)

Legend:

SR...max. strength right hand, SL... max. strength left hand, M... mean, SD... standard deviation

Sample	Female (n=65)			
Variables	M	SD	min	max
Age	10.20	0.60	9.0	10.9
Weight (kg)	36.76	6.10	25.8	53.0
Height (cm)	145.30	7.50	130.0	165.0
SR (kp)	18.90	4.82	11.0	36.6
SL (kp)	16.70	5.03	9.1	39.2

ANALÝZA JEDNOROZMĚRNÉHO SOUBORU

METODY DESKRIPTIVNÍ STATISTIKY

1. URČENÍ TYPU ŠKÁLY (nominální, ordinální, metrické)

- a) nominální + ordinální \Rightarrow *neparametrické stat. metody*
- b) metrické \Rightarrow *parametrické statistické metody*

2. ROZLOŽENÍ ČETNOSTÍ ZNAKŮ (NORMÁLNÍ ČI JINÉ)

- a) normální \Rightarrow *parametrické statistické metody*
- b) jiné \Rightarrow *neparametrické statistické metody*

3. VÝPOČET ZÁKLADNÍCH STATISTICKÝCH CHARAKTERISTIK

- a) míry centrální tendence
- b) míry variability
- c) míry závislosti

2.5 MÍRY ZÁVISLOSTI

2.5.1 ZÁVISLOST PEVNÁ, VOLNÁ, STATISTICKÁ A KORELAČNÍ

Jednorozměrné soubory - charakterizovány

jednotlivými statistickými znaky (výkon ve skoku do dálky,

v běhu na 100m, tělesná výška, tělesná hmotnost, ...



Existence **souvislostí mezi znaky:**

- úspěšnost střelby 1. a 2. pokus,
- tělesná výška x hmotnost,...

2.5.1 ZÁVISLOST PEVNÁ, VOLNÁ, STATISTICKÁ A KORELAČNÍ

Míry závislosti se zabývají hledáním, zkoumáním a hodnocením souvislostí (závislostí, vztahů) mezi dvěma (či více) statistickými znaky.



Závislosti znaků, věcí a jevů mohou být velmi rozmanité:

- **nepodstatné** (náhodné)
- **příčinné (kauzální) závislosti** jsou výrazem určité vnitřní nutnosti (**příčina vyvolává následek**)

Příčinná (kauzální) závislost je závislost, kdy daný jev či několik jevů (***příčina***) ***nutně vyvolává*** za určitých podmínek jiný jev (***následek, účinek***).

Nejjednodušší formy *kauzálních závislostí* se vyskytují u přírodních jevů např.

... při zahřívání tělesa za konstantních podmínek (elementární příčina) dochází ke zvětšování jeho objemu (elementární účinek) => tj. princip teploměru.

DRUHY ZÁVISLOSTÍ: 1. PEVNÁ ZÁVISLOST

Pevná závislost = případ, kdy výskytu jednoho jevu **NUTNĚ ODPOVÍDÁ** výskyt druhého jevu.

Tedy jedné hodnotě jedné proměnné odpovídá jen jedna hodnota jiné proměnné (funkční závislost).

Např. zahříváme-li těleso 5 min,
vzroste teplota o $10\text{ }^{\circ}\text{C}$,
zahříváme-li těleso 10 min,
vzroste teplota o $20\text{ }^{\circ}\text{C}$, atd.



PEVNÁ ZÁVISLOST

Pevná závislost – charakteristika:

- **se opakuje ve všech jednotlivých případech (při dodržení standardních podmínek).**
- **může být tedy charakterizována jediným pozorováním** (větší počet pozorování slouží k ověření výsledků a vyloučení chyb).
- **setkáváme se s ní při formulování zákonitostí vztahů mezi proměnnými**
(např. fyzikální zákony = Archimedův zákon).

2. VOLNÁ ZÁVISLOST

Volná závislost = případ, kdy výskyt jednoho jevu **OVLIVŇUJE** výskyt druhého jevu (**NE** nutně odpovídá).

Tedy každé hodnotě jedné proměnné odpovídají různé hodnoty jiné proměnné (statistická závislost).

Volnou závislost lze zkoumat pouze na základě mnoha pozorování, jediné pozorování může přinést naprosto nahodilý výsledek.

VOLNÁ ZÁVISLOST

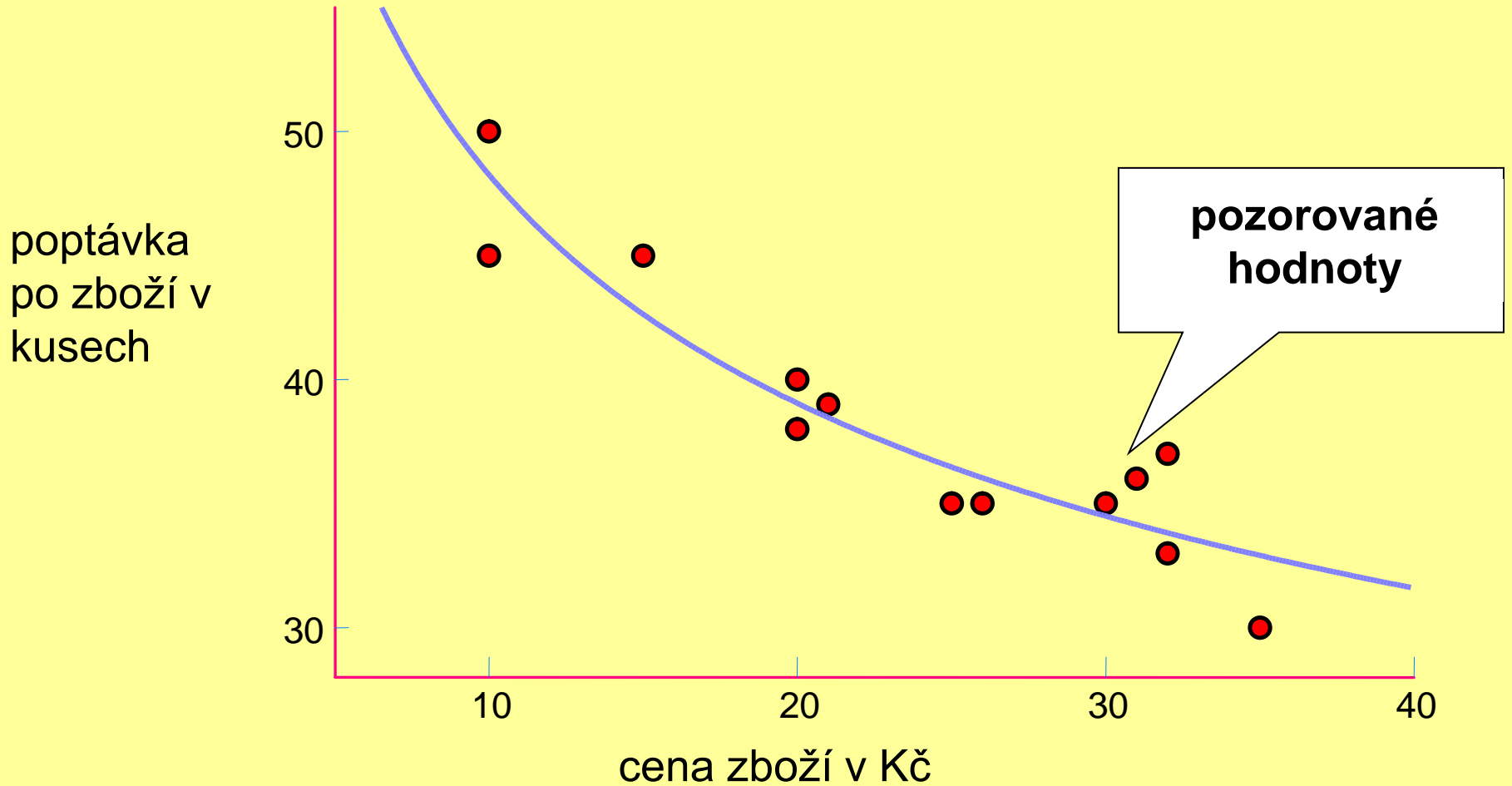
- při jejím zkoumání hraje důležitou roli volba *vhodných statistických znaků* (tedy takových, které postihují jevy co nejpřesněji),
- *dostatečný rozsah souboru* (u malých souborů se může projevit vliv náhodných a vedlejších činitelů).

Při zkoumání společenských jevů se většinou nesetkáváme s pevnou závislostí ale s volnou, kdy *určitá příčina vede k různým účinkům.*

Např. skok daleký: rychlost \times délka skoku (volná z.)

VOLNÁ ZÁVISLOST

tržní poptávka



2.5.2 REGRESNÍ A KORELAČNÍ ANALÝZA

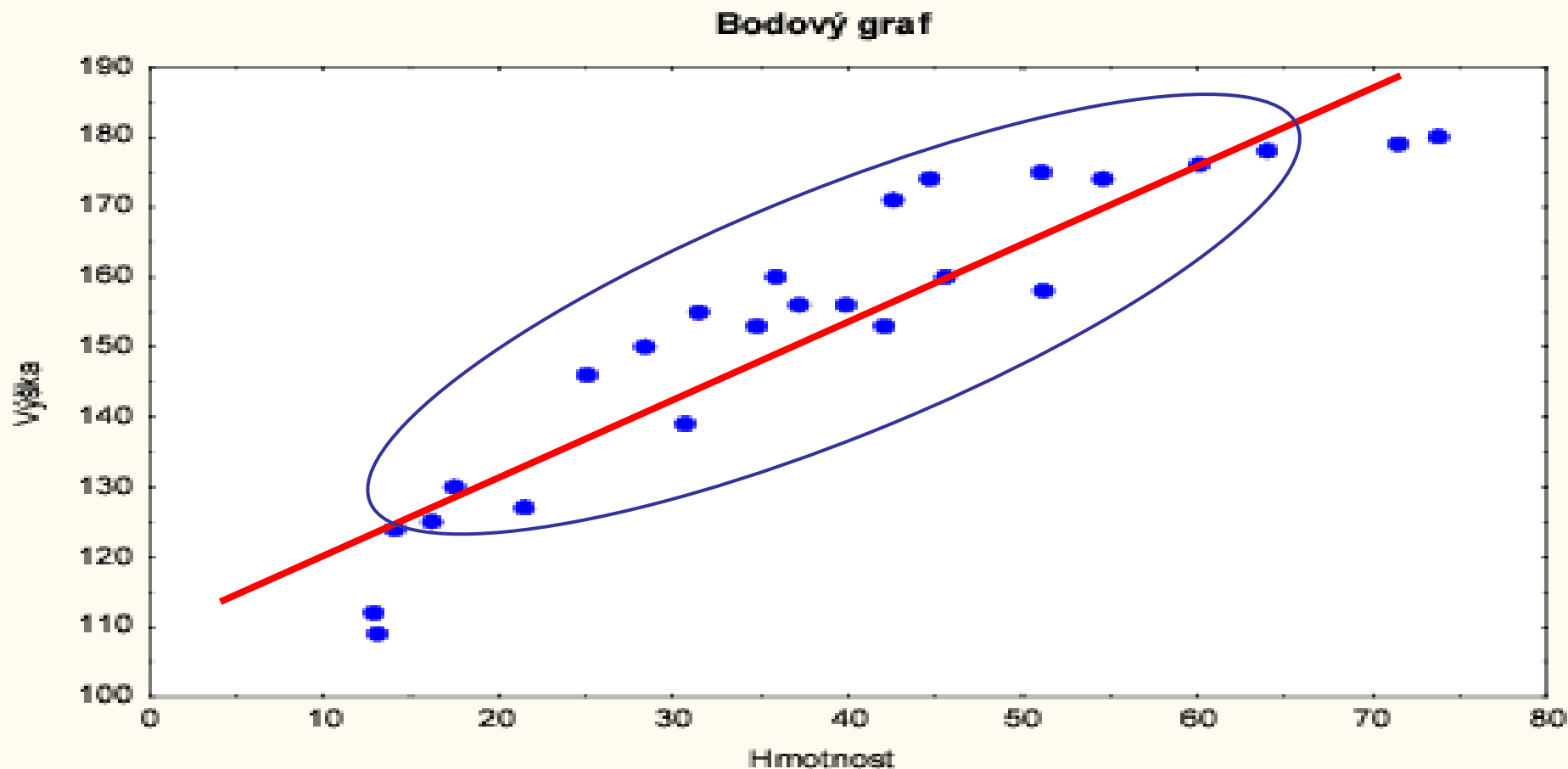
Metody regresní a korelační analýzy slouží k poznání a matematickému popisu statistických závislostí; jsou souhrnně označovány jako *korelační počet*.

Hlavní úkoly korelačního počtu:

- 1. postižení povahy korelační závislosti (regresní analýza),*
- 2. měření těsnosti korelační závislosti (korelační analýza).*

Hlavní úkoly korelačního počtu:

1. **postižení povahy korelační závislosti (regresní analýza),**
2. **měření těsnosti korelační závislosti (korelační analýza).**



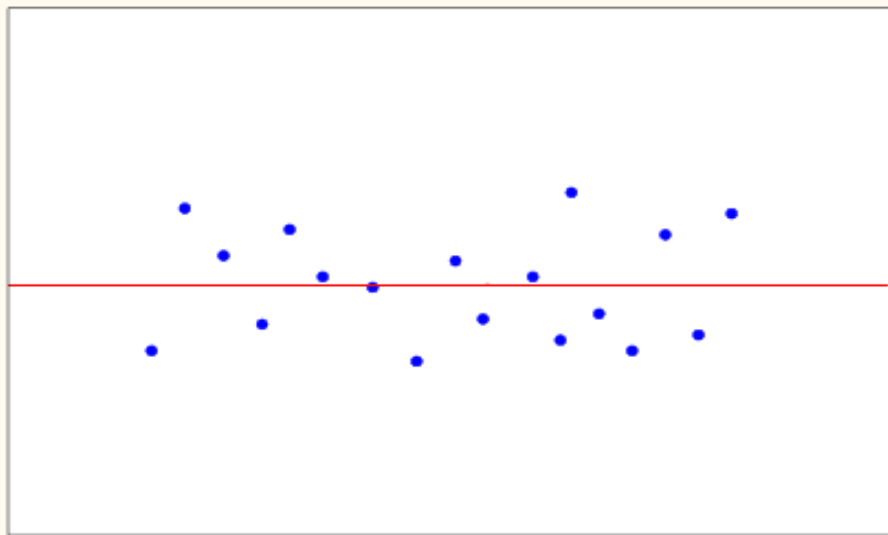
HLAVNÍ ÚKOLY KORELAČNÍHO POČTU

1. postižení povahy korelační závislosti umožňuje odhady neznámých hodnot **závisle proměnné y** při známých hodnotách **nezávisle proměnné x** - hovoříme o **regresi**.

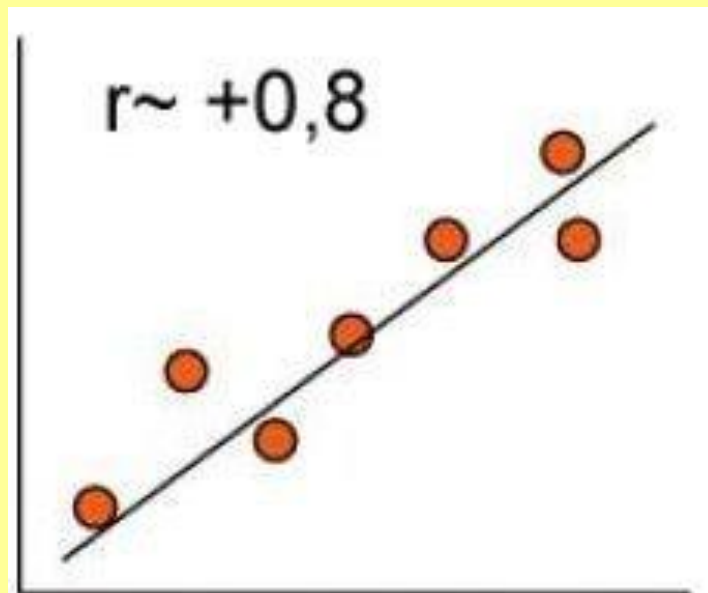
Povaha korelační závislosti je nejčastěji vyjadřována matematickou funkcí - hovoříme o **regresní funkci**.

Tento úkol korelačního počtu nazýváme **regresní analýza**.

Nulová korelace



$r \sim +0,8$



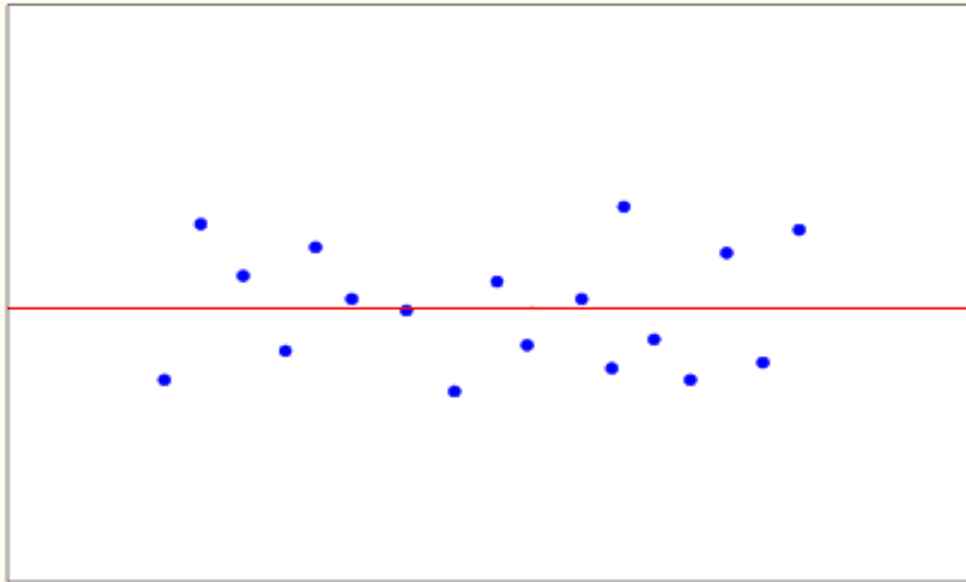
HLAVNÍ ÚKOLY KORELAČNÍHO POČTU

2. měření těsnosti korelační závislosti umožňuje posuzovat **přesnost regresních odhadů** a **míru korelační závislosti** - hovoříme o **vlastní korelaci**.

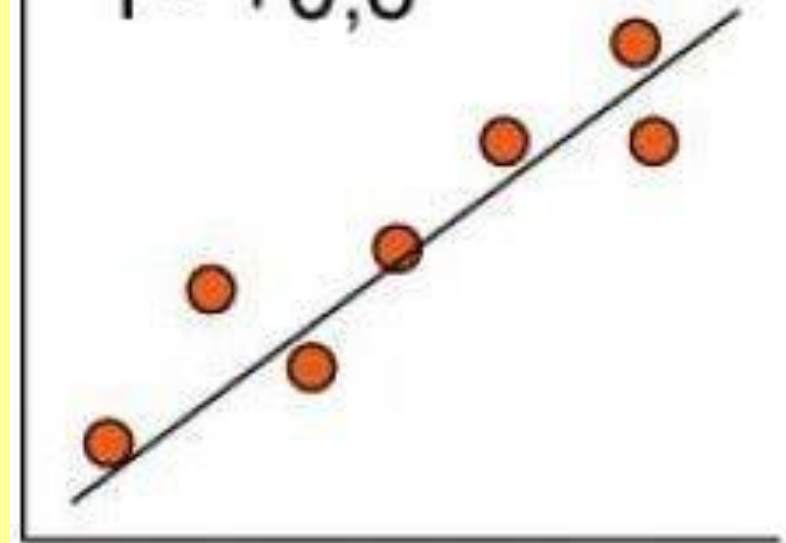
Korelace je vyjadřována tzv. **korelačním koeficientem**.

Tento úkol korelačního počtu nazýváme **korelační analýza**.

Nulová korelace



$r \sim +0,8$



2.5.3 REGRESNÍ ANALÝZA (LINEÁRNÍ)

1. ÚKOL „POSTIŽENÍ POVAHY KORELAČNÍ ZÁVISLOSTI“

Regresní analýza umožňuje postihnout povahu závislosti pomocí **matematické funkce**, která by co nejlépe vyjadřovala charakter zkoumané závislosti.

Hledaná matematická funkce se nazývá **regresní funkce** a je vyjádřena **regresní rovnicí**.

Regresní funkce může nabývat mnoha typů:

- **lineární regrese**
 - **kubická regrese**
 - **hyperbolická regrese**
 - **kvadratická regrese**
 - **polynomická regrese**
 - **logaritmická regrese**
- ...a mnohé jiné...

Nejjednodušší z nich je **LINEÁRNÍ REGRESNÍ FUNKCE**, která má ve své empirické podobě tvar

$$Y = a + b \cdot x$$

Pro vyjádření **regresní funkce** konkrétní závislosti (např. tělesné výšky a hmotnosti) je třeba určit tzv. **regresní koeficienty a, b**, přičemž vycházíme z empirických údajů (měřených znaků) sledované závislosti.

Pro výpočet **regresních koeficientů a, b** je výhodné použít následující vzorce

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n}$$

2.5.4 KORELAČNÍ ANALÝZA (LINEÁRNÍ)

2. ÚKOL „MĚŘENÍ TĚSNOSTI KORELAČNÍ ZÁVISLOSTI“

Pojem **korelace** pochází z latiny (*co – relation* = souvztažnost), korelaci nejčastěji označujeme symbolem „**r**“.

Korelace je nejobecněji definována jako...

...volná kvantitativní závislost dvou či více jevů.

Korelace vyjadřuje míru (těsnost, stupeň) závislosti a je charakterizována číslem, tzv. **korelačním koeficientem (r), který..**

..., „měří“ těsnost závislosti popsané lineární regresní funkcí.

VZORCE PRO VÝPOČET KORELAČNÍHO KOEFICIENTU

Symbolická podoba vzorce pro výpočet korelačního koeficientu

kovariance

$$r = \frac{s_{x,y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var } X \cdot \text{var } Y}}$$

**součin obou
směrodatných odchylek**

Korelace je tedy matematicky *podíl kovariance a součinu obou směrodatných odchylek* (viz dále).

Metrická data ⇒

Pearsonův koeficient součinné korelace (vzorec)

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Pearsonův koeficient součinné korelace - výpočtový tvar

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum x_i^2 - n \bar{x}) (\sum y_i^2 - n \bar{y})}}$$

Pro **metrická data** užíváme k výpočtu míry těsnosti korelační závislosti tzv. **Pearsonův koeficient součinné korelace**.

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

Pro **ordinální data** užíváme k výpočtu míry těsnosti korelační závislosti tzv. **Spearmanův koeficient pořadové korelace**.

$$r_{xy} = 1 - \frac{6 \cdot \sum (i_x - i_y)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum (R_i - Q_i)^2$$

VLASTNOSTI KORELACE

1. VELIKOST KORELACE

Korelační koeficient **r** nabývá hodnot z intervalu **$\langle -1 ; 1 \rangle$**

Význam hodnot 0, 1, -1

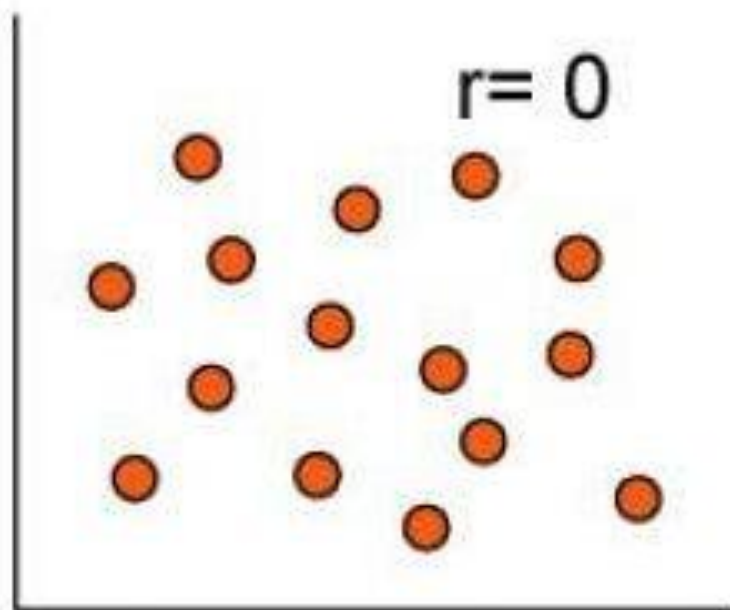
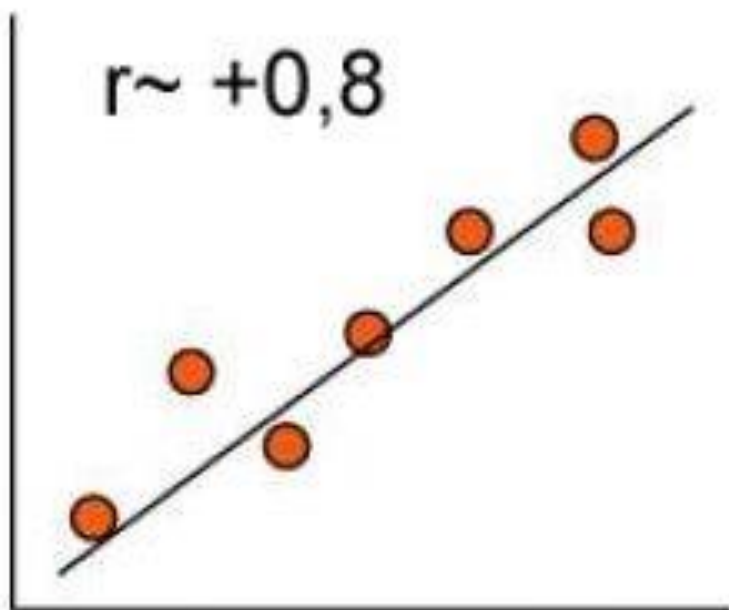
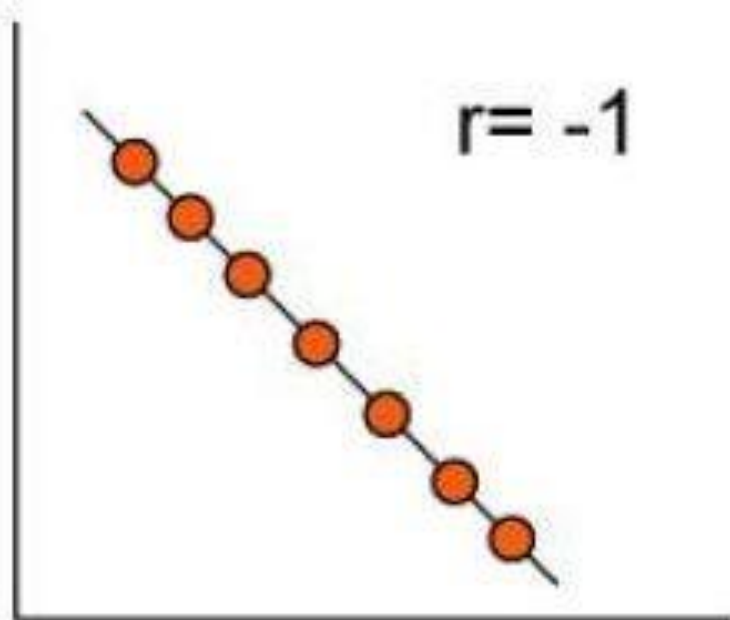
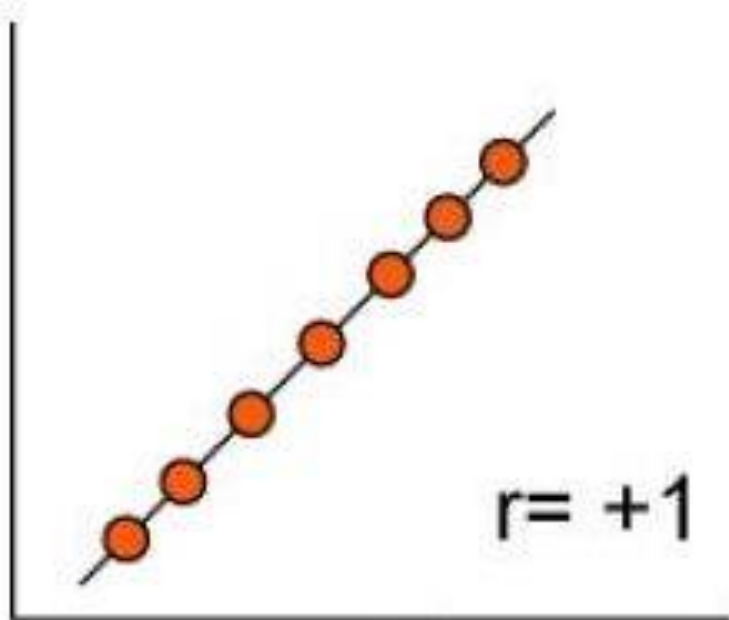
$r = 0$ \Leftarrow lineární **nezávislost** proměnných

$r = 1$ \Leftarrow úplná (*funkční*) **pozitivní** lineární závislost

$r = -1$ \Leftarrow úplná (*funkční*) **negativní** lineární závislost

Čím více se **r** blíží **hodnotě 1**, tím považujeme **závislost za silnější**,

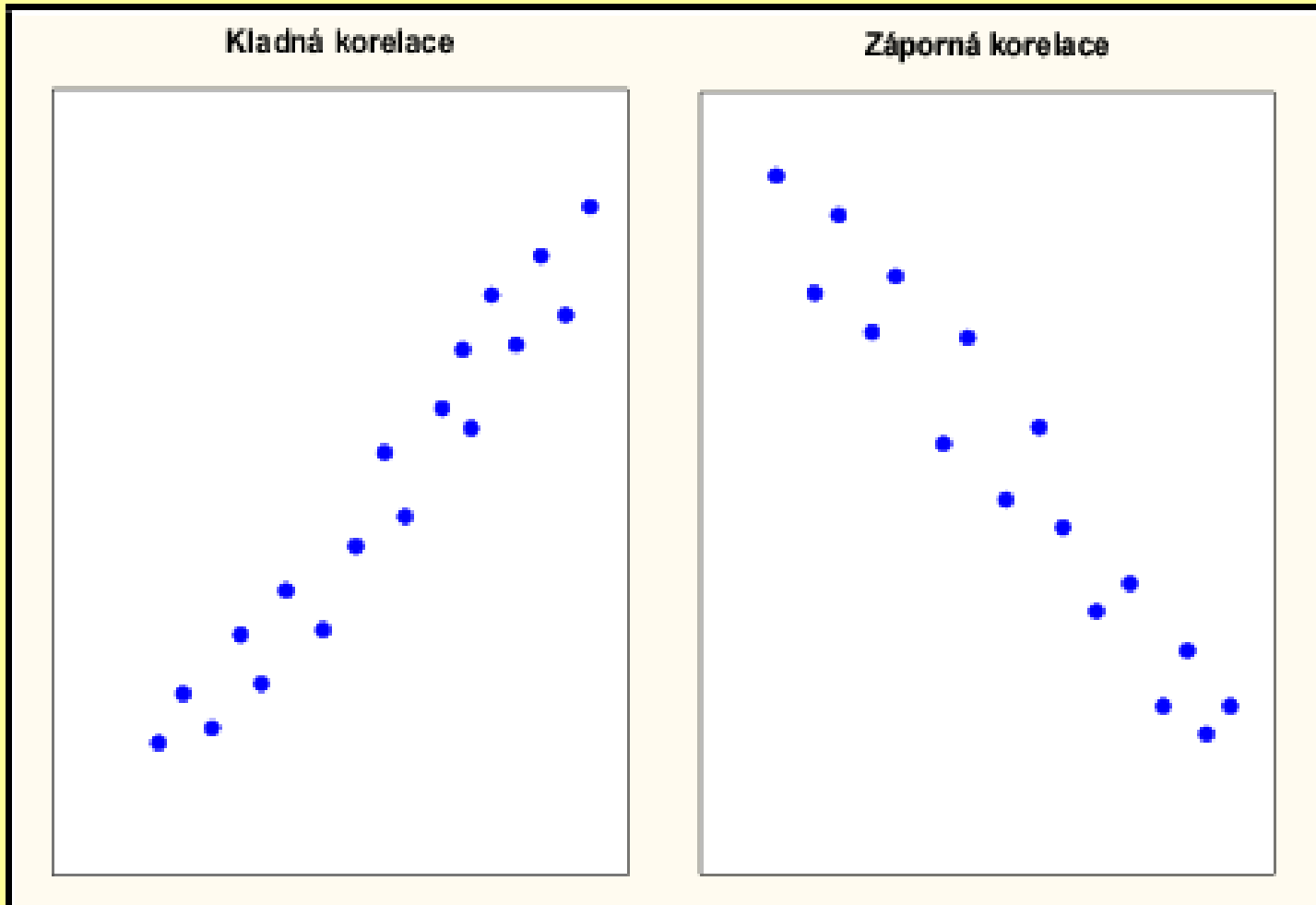
čím více se **r** blíží **hodnotě 0**, tím považujeme **závislost za slabší**.



2. SMĚR KORELACE

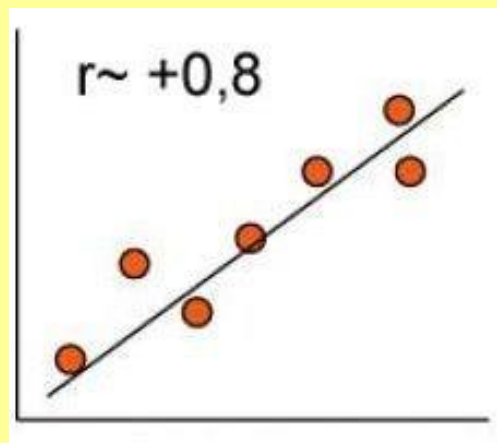
a) kladná (pozitivní) $<0;1>$

b) záporná (negativní) $<-1;0>$

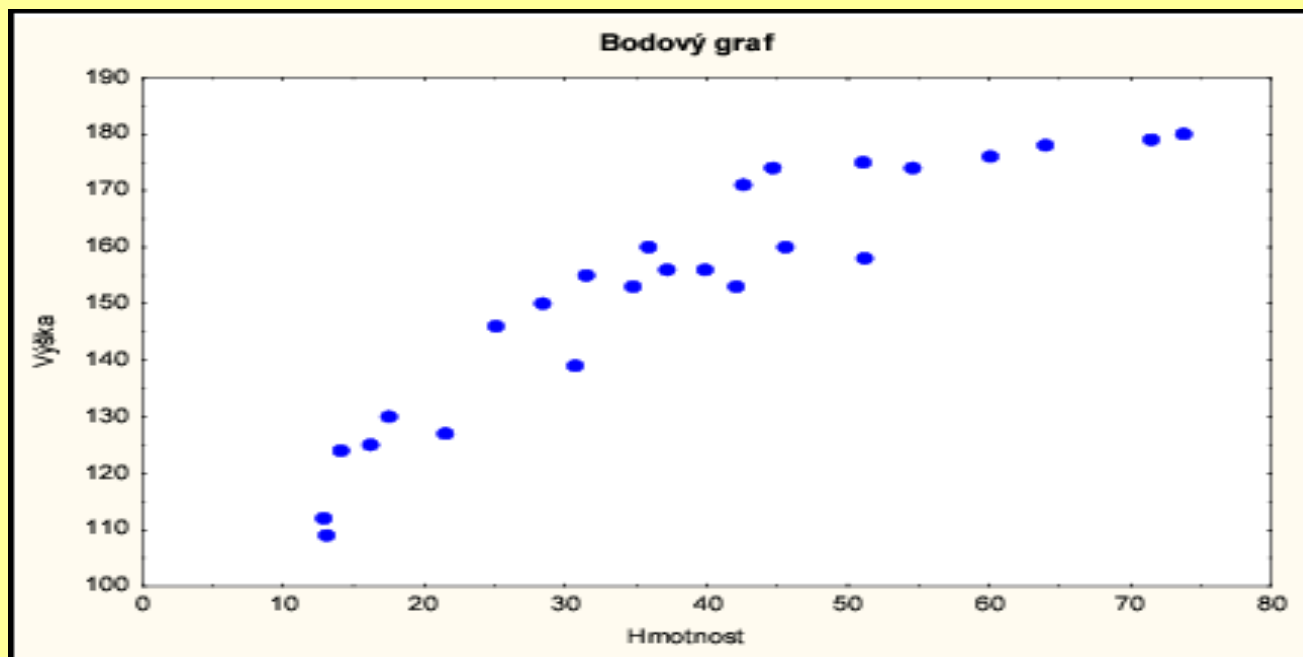


3. TVAR KORELACE

a) lineární (lze dosti dobře proložit přímkou)



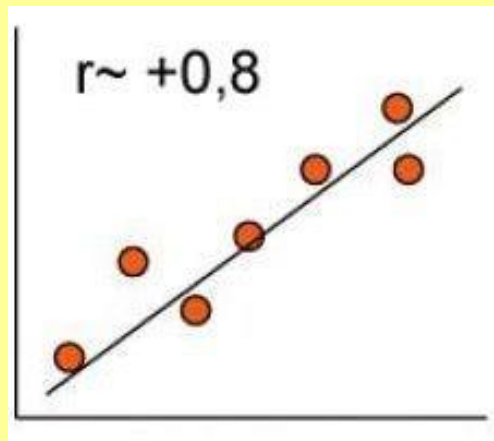
b) nelineární (nelze proložit přímkou)



POZNÁMKY KE KORELACÍM

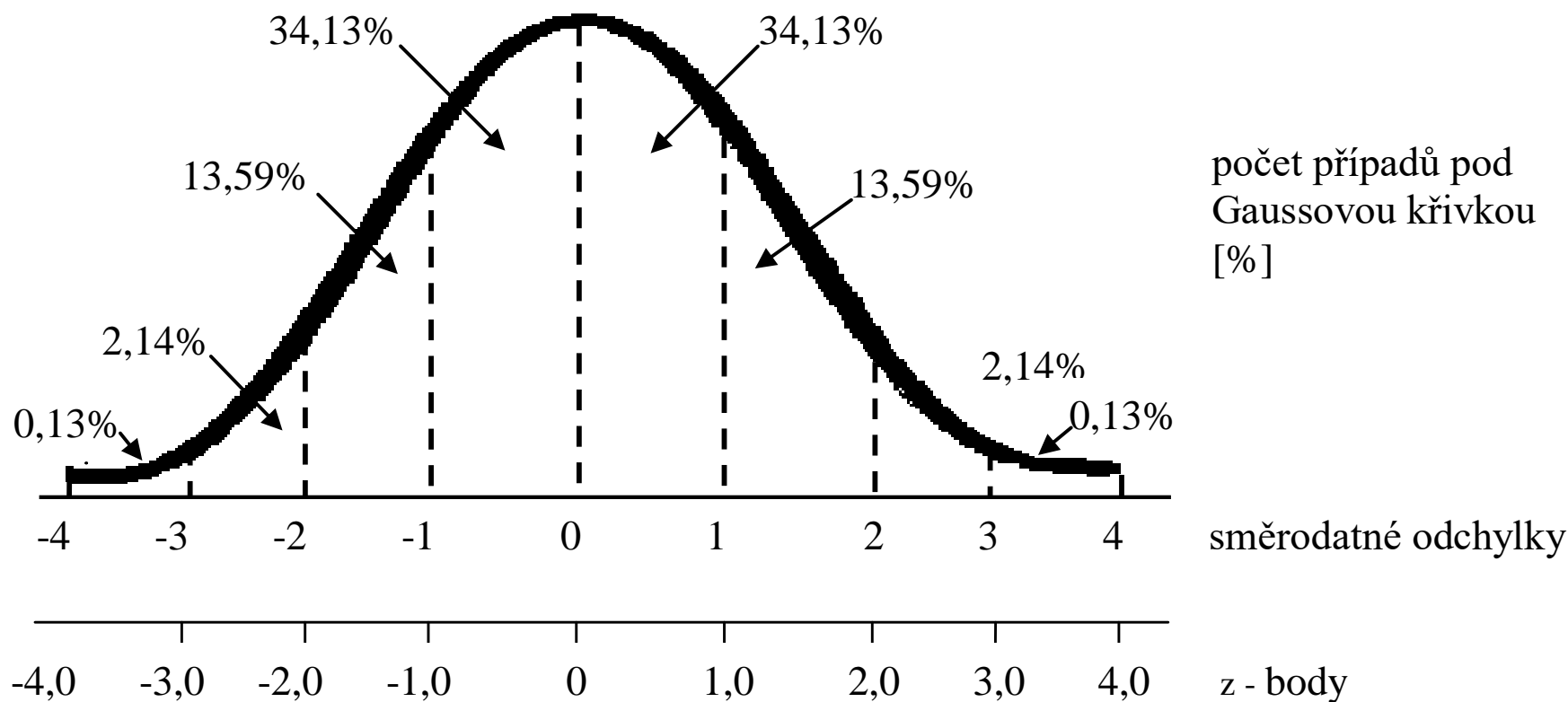
1. Matematicko-statistické předpoklady výpočtu korelačního koeficientu:

a) linearita (korelačním polem lze dosti dobře proložit přímkou),



1. Matematicko-statistické předpoklady výpočtu korelačního koeficientu:

b) normalita (dvojrozměrné normální rozložení četností),



1. Matematicko-statistické předpoklady výpočtu korelačního koeficientu:

c) dostatečný rozsah souboru ($n=200$, $n=100$, $n=30$)



2. Věcný a formální smysl znaménka korelačního koeficientu

Např. vypočítaná korelační závislost výsledků studentů FTK
($n=185$) v běhu na 100m ...



... a ve skoku dalekém je



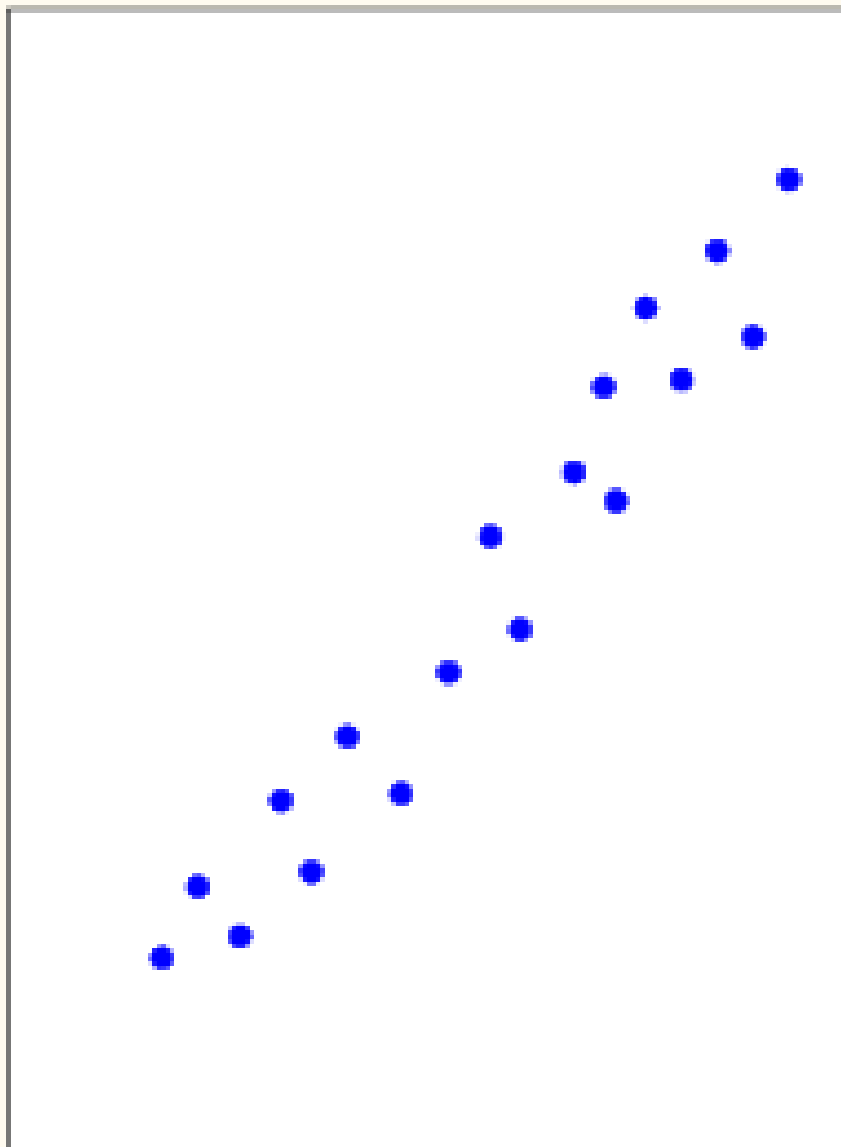
$$r = -0,8 \quad \langle -1 ; 1 \rangle$$

Co to znamená z hlediska
interpretace?

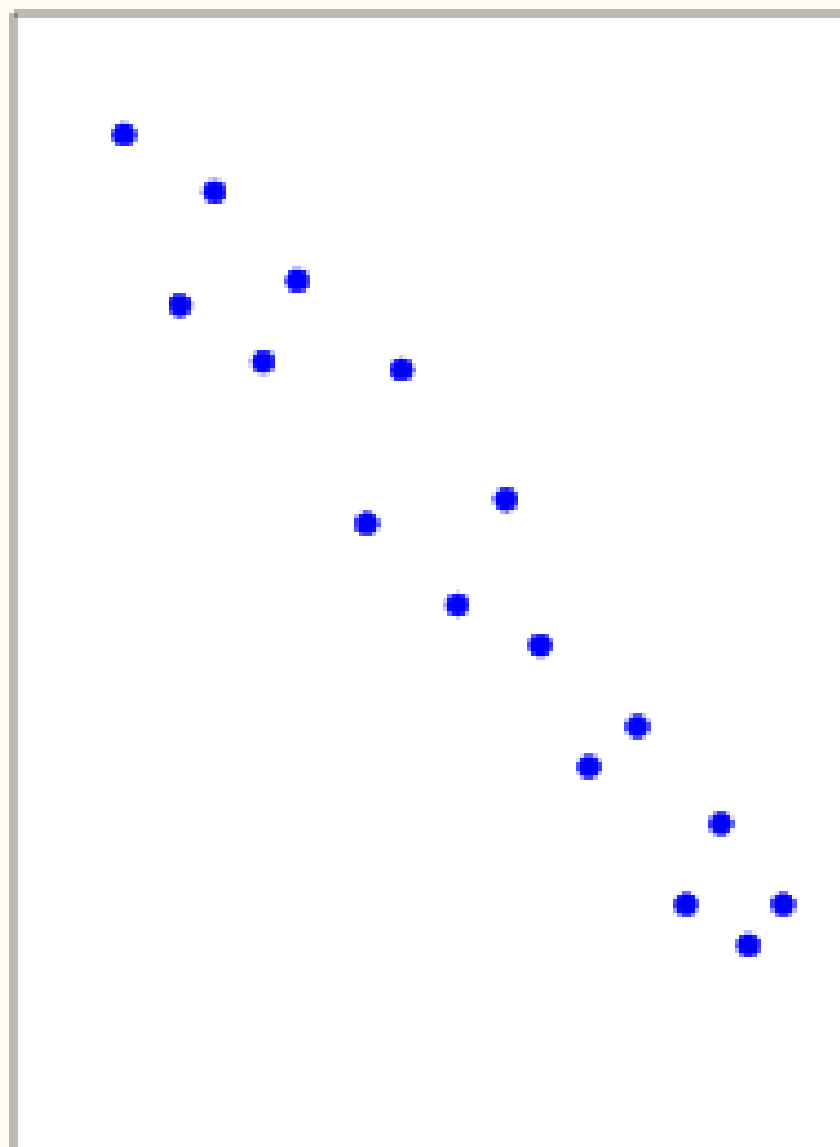
a) kladná (pozitivní) $\langle 0;1 \rangle$

b) záporná (negativní) $\langle -1;0 \rangle$

Kladná korelace



Záporná korelace



To by ovšem znamenalo, že kdo je **rychlejší** v běhu na 100m,
ten dosahuje **horších** výsledků ve skoku dalekém.

To je ovšem...

...odborně i věcně **NESMYSL!**



PROČ ???

PROTOŽE...

...jakou „**hodnotu**“ má výsledek v běhu na 100 m

10,7 s versus 12,3 s?

...jakou „**hodnotu**“ má výsledek ve skoku dalekém

570 cm versus 430 cm?

3. Koeficient determinace r^2

... určuje jaká část rozptylu výkonu *v jednom testu* je dána proměnlivostí (variabilitou) výkonů *v druhém testu*.

Např. výše uvedená korelační závislost výsledků studentů FTK ($n=185$) *v běhu na 100m a ve skoku dalekém* $r = 0,8$ znamená, že...

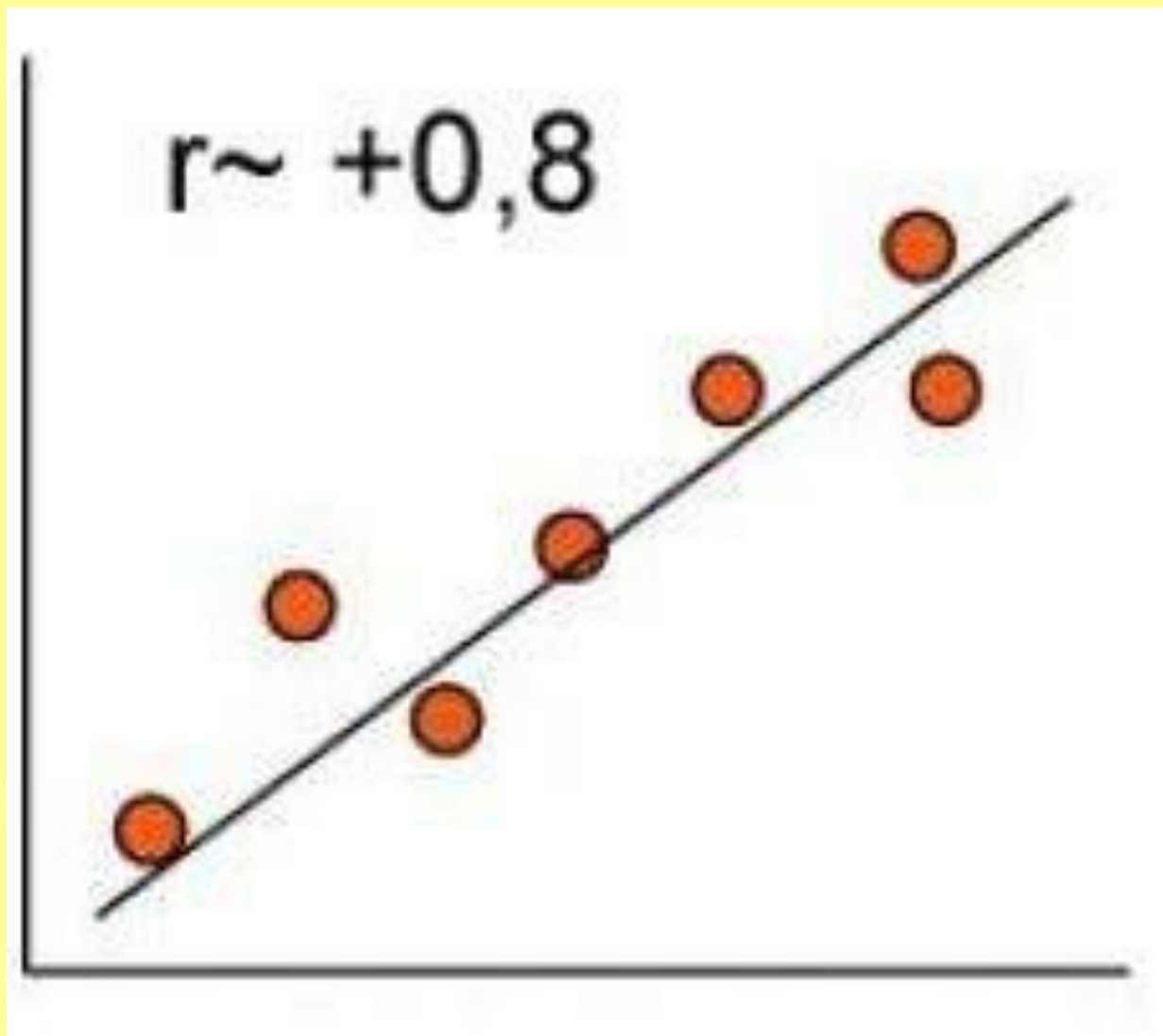
Koeficient determinace $r^2 = 0,64$ (64 %).

Tedy 64 % rozptylu výkonu *ve skoku dalekém* je ovlivněno (determinováno) proměnlivostí (variabilitou) výkonů *v běhu na 100m*.

REGRESNÍ ANALÝZA (1. úkol korelačního počtu)

PŘÍKLAD 7. Výpočet - koeficientů regresní přímky

Regresní přímka $Y = a + b \cdot x$



REGRESNÍ ANALÝZA (1. úkol korelačního počtu)

PŘÍKLAD 7. Výpočet - koeficientů regresní přímky

Hráč	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
x_i	7	6	7	8	9	8	8	8	9	10
y_i	4	8	6	8	7	8	7	4	8	10

Regresní přímka $Y = a + b \cdot x$

POMOCNÁ TABULKA

Hráč	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
------	-------	-------	---------	---------	-----------------

REGRESNÍ ANALÝZA (1. úkol korelačního počtu)

PŘÍKLAD 7. Výpočet - koeficientů regresní přímky

POMOCNÁ TABULKA

Hráč	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
A	7	4	49	16	28
B	6	8	36	64	48
C	7	6	49	36	42
D	8	8	64	64	64
E	9	7	81	49	63
F	8	8	64	64	64
G	8	7	64	49	56
H	8	4	64	16	32
J	9	8	81	64	72
K	10	10	100	100	100
Σ	80	70	652	522	569

Pořadí osob	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
Σ	80	70	652	522	569

Statistické charakteristiky: $AP_x = 8$ $AP_y = 7$ $s_x = 1,1$ $s_y = 1,8$

$$b = \frac{10 \cdot 569 - 80 \cdot 70}{10 \cdot 652 - (80)^2} = \frac{90}{6520 - 6400} = \frac{90}{120} = 0,75$$

$$a = \frac{70 - 0,75 \cdot 80}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

$$Y = a + b \cdot x = 1 + 0,75 \cdot x$$

Konstrukce regresní přímky za pomoci regresní rovnice

$$Y = a + b \cdot x = 1 + 0,75 \cdot x$$

Pozn. x ...nezávisle proměnná

y ...závisle proměnná

Volba $x \Rightarrow$

X	8	10
-----	---	----

$$Y_1 = 1 + 0,75 \cdot 8 = 7$$

$$Y_2 = 1 + 0,75 \cdot 10 = 8,5$$

Výpočet $y \Rightarrow$

Y	7	8,5
-----	---	-----

$$Z_1 (8; 7)$$

$$Z_2 (10; 8,5)$$

2) $X = a + b \cdot Y$ SAMI !!!

Pozn. y ...nezávisle proměnná

x ...závisle proměnná

Pořadí osob	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
Σ	80	70	652	522	569

Statistické charakteristiky: $AP_x = 8$ $AP_y = 7$ $s_x = 1,1$ $s_y = 1,8$

Regresní přímka $X = a + b \cdot y$

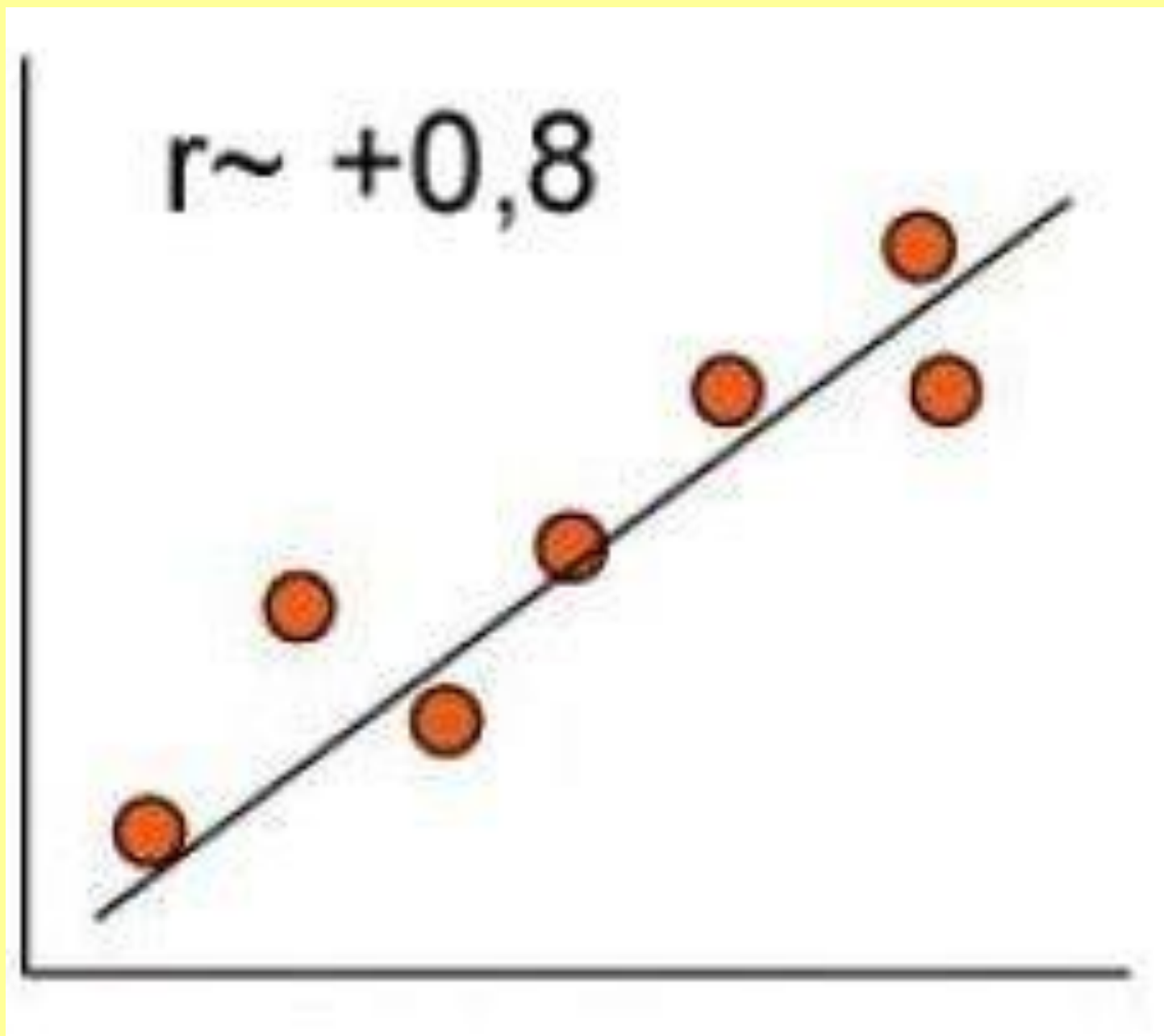
$$b = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} \quad a = \frac{\sum x_i - b \cdot \sum y_i}{n}$$

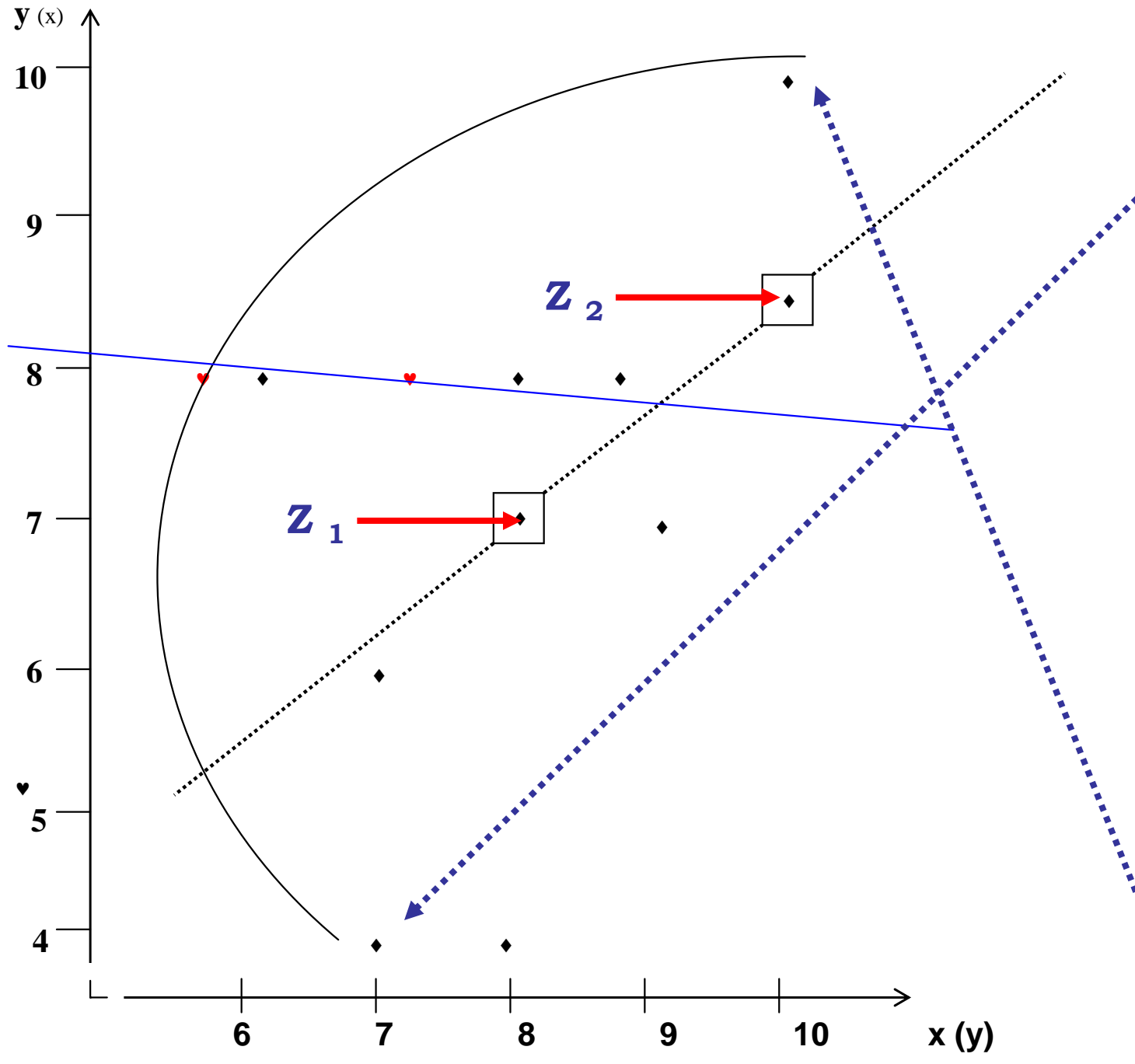
$$b = \frac{10 \cdot 569 - 80 \cdot 70}{10 \cdot 522 - (70)^2} = \frac{5690 - 5600}{5220 - 4900} = \frac{90}{320} = 0,28$$

$$a = \frac{80 - 0,28 \cdot 70}{10} = \frac{60,4}{10} = 6$$

$$\mathbf{X = a + b \cdot y = 6 + 0,28 \cdot y}$$

Graf korelační závislosti (= korelogram) - konstrukce





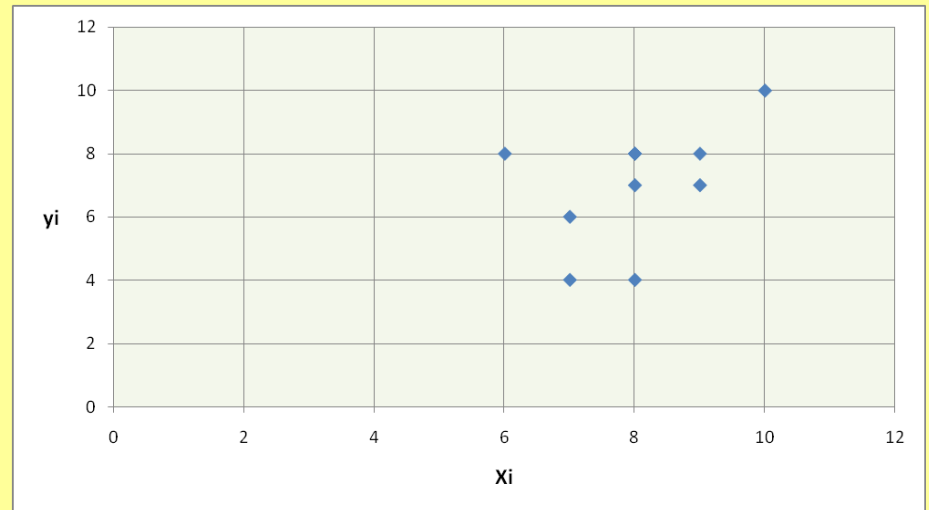
	x_i	y_i
A	7	4
B	6	8
C	7	6
D	8	8
E	9	7
F	8	8
G	8	7
H	8	4
J	9	8
K	10	10

Pomocí Excelu – Statistické funkce

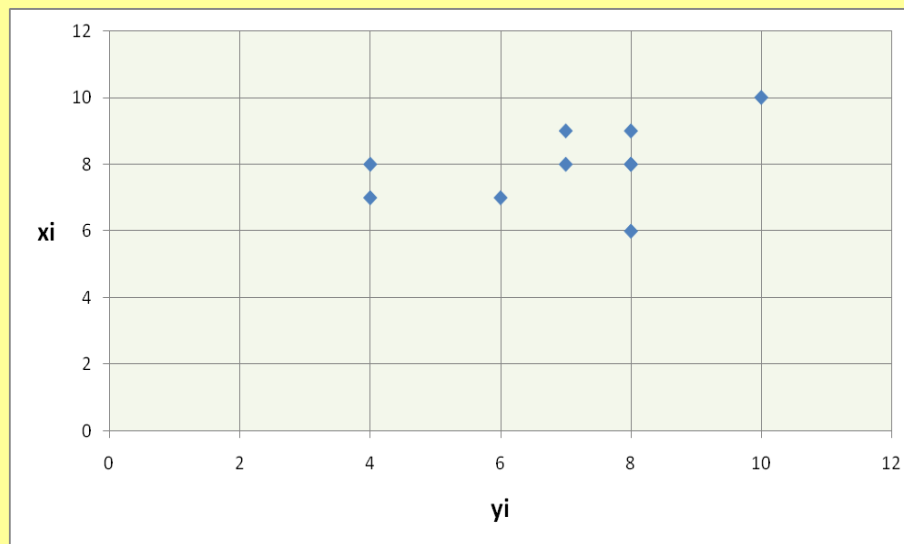
Výpočet koeficientů regresní přímky

	A	B	C	D
1	Hráč	x_i	y_i	
2	A	7	4	
3	B	6	8	
4	C	7	6	
5	D	8	8	
6	E	9	7	
7	F	8	8	
8	G	8	7	
9	H	8	4	
10	J	9	8	
11	K	10	10	
12				

$$1) Y = a + b \cdot X$$



$$2) X = a + b \cdot Y$$



Pomocí Excelu – Statistické funkce

Výpočet koeficientů regresní přímky

Argumenty funkce

INTERCEPT

Pole_y C2:C11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Pole_x B2:B11 = {7|6|7|8|9|8|8|9|10}

= 1

Vypočte souřadnice bodu, ve kterém čára protne osu y, pomocí proložení nejlepší regresní čáry známými hodnotami x a y.

Pole_x je nezávislá množina pozorování nebo dat. Hodnoty argumentu mohou být čísla nebo názvy, matice nebo odkazy obsahující čísla.

Výsledek = 1

[Nápověda k této funkci](#)

INTERCEPT
odhad parametru a

SLOPE
odhad parametru b

Argumenty funkce

SLOPE

Pole_y C2:C11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

Pole_x B2:B11 = {7|6|7|8|9|8|8|9|10}

= 0,75

Vrátí směrnici lineární regresní čáry proložené zadanými datovými body.

Pole_x je množina nezávislých datových bodů. Mohou to být čísla nebo názvy, matice nebo odkazy obsahující čísla.

Výsledek = 0,75

[Nápověda k této funkci](#)

1) $Y = a + b \cdot X$
 $Y = 1 + 0,75 \cdot X$

2) $X = a + b \cdot Y$
 $X = 6 + 0,28 \cdot Y$

Pomocí Excelu – Analýza dat – Regrese

Výpočet koeficientů regresní přímky

$$1) Y = a + b \cdot X$$

$$Y = 1 + 0,75 \cdot X$$

	A	B	C	D
1	Hráč	x_i	y_i	
2	A	7	4	
3	B	6	8	
4	C	7	6	
5	D	8	8	
6	E	9	7	
7	F	8	8	
8	G	8	7	
9	H	8	4	
10	J	9	8	
11	K	10	10	
12				

Regrese [?] [X]

Vstup

Vstupní oblast Y: [...]

Vstupní oblast X: [...]

Popisky Konstanta je nula

Hladina spolehlivosti %

OK

Storno

Nápověda

Možnosti výstupu

Výstupní oblast:

Nový list:

Nový sešit

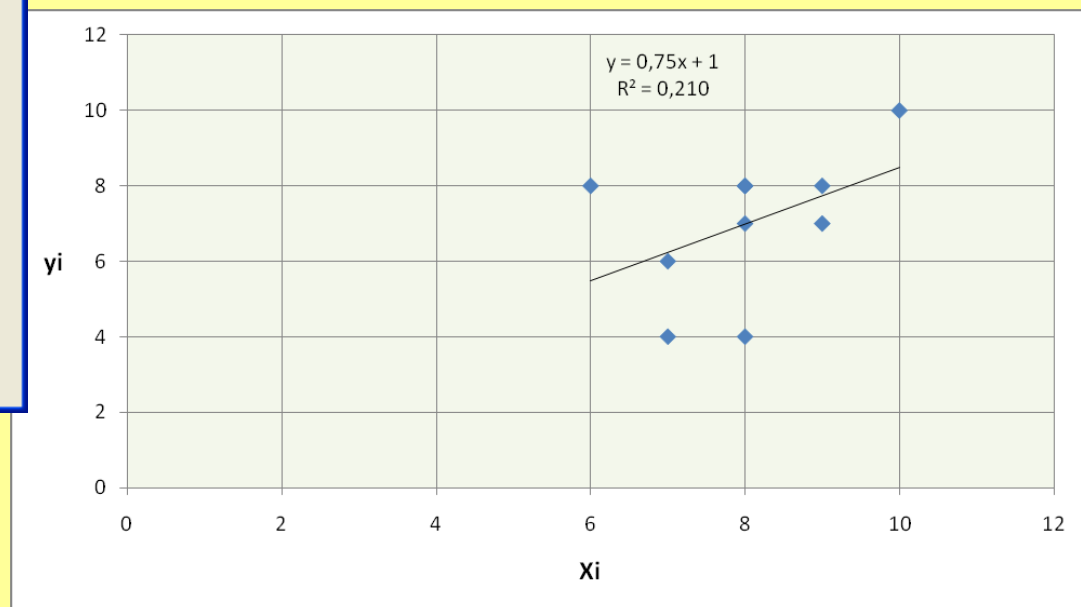
Rezidua

Rezidua Graf s rezidui

Standardní rezidua Graf regresní přímky

Normální pravděpodobnost

Graf pravděpodobnosti



Pomocí Excelu – Analýza dat – Regrese

Výpočet koeficientů regresní přímky

VÝSLEDEK

Regresní statistika

Násobné R	0,459279327
Hodnota spolehlivosti R	0,2109375
Nastavená hodnota spolehlivosti R	0,112304688
Chyba stř. hodnoty	1,7765838
Pozorování	10

korelační koeficient
koeficient determinace

Významnost $F < \alpha = 0,05 \rightarrow$

model je statisticky vhodný

ANOVA

	Rozdíl	SS	MS	F	Významnost F
Regrese	1	6,75	6,75	2,138613861	0,181775314
Rezidua	8	25,25	3,15625		
Celkem	9	32			

	Koeficienty	Chyba stř. hodnoty	t Stat	Hodnota P	Dolní 95%	Horní 95%
Hranice	a	1	4,141130079	0,241479978	0,815257536	-8,549463079 10,54946308
xi	b	0,75	0,512855568	1,462400035	0,181775314	-0,432647059 1,932647059

Pomocí Excelu – Analýza dat – Regrese

Výpočet koeficientů regresní přímky

$$2) X = a + b \cdot Y$$

$$X = 6 + 0,28 \cdot Y$$

	Hráč	yi	xi
14			
15	A	4	7
16	B	8	6
17	C	6	7
18	D	8	8
19	E	7	9
20	F	8	8
21	G	7	8
22	H	4	8
23	J	8	9
24	K	10	10
25			

Regrese [?] [X]

Vstup

Vstupní oblast Y: [...]

Vstupní oblast X: [...]

Popisky Konstanta je nula

Hladina spolehlivosti %

Možnosti výstupu

Výstupní oblast: [...]

Nový list:

Nový sešit

Rezidua

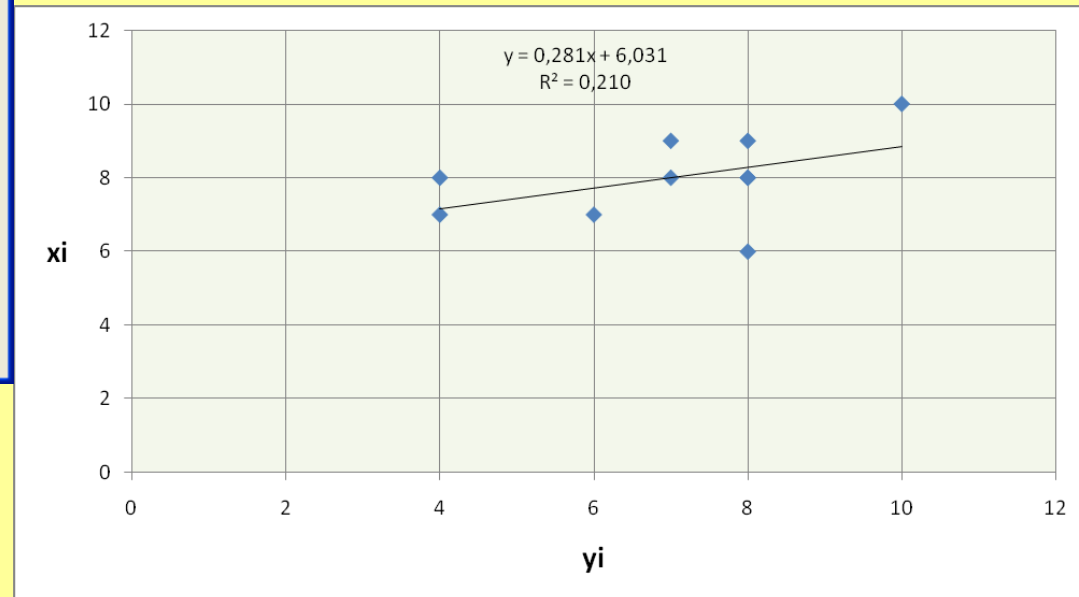
Rezidua Graf s rezidui

Standardní rezidua Graf regresní přímky

Normální pravděpodobnost

Graf pravděpodobnosti

OK Storno nápověda



Pomocí Excelu – Analýza dat – Regrese

Výpočet koeficientů regresní přímky

VÝSLEDEK

Regresní statistika

Násobné R	0,459279327
Hodnota spolehlivosti R	0,2109375
Nastavená hodnota spolehlivosti R	0,112304688
Chyba stř. hodnoty	1,087930949
Pozorování	10

korelační koeficient
koeficient determinace

Významnost $F < \alpha = 0,05 \rightarrow$

model je statisticky vhodný

ANOVA

	Rozdíl	SS	MS	F	Významnost F
Regrese	1	2,53125	2,53125	2,138613861	0,181775314
Rezidua	8	9,46875	1,18359375		
Celkem	9	12			

	Koeficienty	Chyba stř. hodnoty	t Stat	Hodnota P	Dolní 95%	Horní 95%
Hranice	a	6,03125	1,389509735	4,340559729	0,002476521	2,827034807 9,235465193
yi	b	0,28125	0,192320838	1,462400035	0,181775314	-0,162242647 0,724742647

KORELAČNÍ ANALÝZA (2. úkol korelačního počtu)

PŘÍKLAD 7. Výpočet (Pearsonova) korelačního koeficientu

Pořadí osob	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
Σ	80	70	652	522	569

Výpočtový tvar

$$r_{x,y} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

$$r = \frac{10 \cdot 569 - 80 \cdot 70}{\sqrt{(10 \cdot 652 - 6400) \cdot (10 \cdot 522 - 4900)}} = 0,46$$

Pomocí Excelu – Statistické funkce

Výpočet (Pearsonova) korelačního koeficientu

	A	B	C	D
1	Hráč	x_i	y_i	
2	A	7	4	
3	B	6	8	
4	C	7	6	
5	D	8	8	
6	E	9	7	
7	F	8	8	
8	G	8	7	
9	H	8	4	
10	J	9	8	
11	K	10	10	
12				

CORREL
výpočet korelačního
koeficientu

Argumenty funkce

CORREL

Pole1 B2:B11 = {7|6|7|8|9|8|8|9|10}

Pole2 C2:C11 = {4|8|6|8|7|8|7|4|8|10}

= 0,459279327

Vrátí korelační koeficient mezi dvěma množinami dat.

Pole2 je druhá oblast buněk s hodnotami. Hodnoty mohou být čísla, názvy, matice nebo odkazy obsahující čísla.

Výsledek = 0,459279327

[Nápověda k této funkci](#)

OK Storno

r = 0,459

Jak „těsná“ je korelační závislost $r = 0,46$?

Vzhledem k intervalu $<0;1>$ resp. $<-1;0>$ se jedná o *střední míru závislosti (kladnou)*.

POSOUZENÍ A INTERPRETACE ZÁVISLOSTI

1. Korelační závislost (vyjádřená korelačním koeficientem) platí pouze pro konkrétní výběr (soubor) s konkrétními osobami, nelze tedy považovat tento vztah za obecně platný!

2. Chceme-li zobecnit platnost vypočítané závislosti „ r “ na **základní soubor (populaci), musíme ověřit (testovat) **hypotézu o statistické významnosti korelačního koeficientu**.**

3. Při testování významnosti „ r “ (odlišnost od nuly), zjišťujeme, zda je výběrový korelační koeficient statisticky významný (s ohledem na rozsah souboru).

4. Zamítnutí (či nezamítnutí) nulové hypotézy provádíme s určitou pravděpodobností na tzv. hladině významnosti (obvykle bývá volena $p = 0,05$ resp. $p = 0,01$).

PRO NÁŠ PŘÍKLAD, kdy $r = 0,46$; $n = 10$

...zjistíme v tabulce kritických hodnot koeficientu součinnové korelace, ...

Tabulka kritických hodnot

Počet dvojic	Kritické hodnoty (na $\alpha=0,05$, $\alpha=0,01$)	
	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,01$
n		
9	0,666	0,798
10	0,632	0,765
11	0,602	0,735
30	0,361	0,463

... že „náš“ korelační koeficient $r = 0,46$ je pro obě hladiny významnosti menší, než tzv. **kritická hodnota**, je tedy

STATISTICKY NEVÝZNAMNÝ.

Závěr: mezi výsledky 1. a 2. pokusů nebyla zjištěna závislost, nelze tvrdit, že... **CO? Interpretace!**

Ale pro $n=30$?

Příklad. Výpočet (Pearsonova) korelačního koeficientu

Testujte hypotézu, zda výběrový korelační koeficient je statisticky významný (s ohledem na rozsah souboru).

Test1	Test2
8	7
5	5
4	4
6	4
7	5
6	4
5	5
7	6

Tab. XVIII.5. Kritické hodnoty $r(\alpha)$ korelačního koeficientu r ;
 $P\{|r| \geq r(\alpha)\} = \alpha$

Rozsah výběru n	α	
	0,05	0,01
3	0,996 9	0,999 9
4	0,950 0	0,990 0
5	0,878 3	0,958 7
6	0,811 4	0,917 2
7	0,754 5	0,874 5
8	0,706 7	0,834 3
9	0,666 4	0,797 7
10	0,631 9	0,764 6
11	0,602 1	0,734 8
12	0,576 0	0,707 9
13	0,552 9	0,683 5
14	0,532 4	0,661 4
15	0,514 0	0,641 1
16	0,497 3	0,622 6
17	0,482 2	0,605 5
18	0,468 3	0,589 7
19	0,455 5	0,575 1
20	0,443 8	0,561 4
21	0,432 9	0,548 7
22	0,422 7	0,536 8
23	0,413 2	0,525 6
24	0,404 4	0,515 1
25	0,396 1	0,505 2

Příklad. Výpočet (Pearsonova) korelačního koeficientu

Pořadí osob	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
Σ	48	40	300	208	247

$$n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

$$r_{x,y} = \frac{\quad}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2] [n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}}$$

$$r = \frac{8 \cdot 247 - 48 \cdot 40}{\sqrt{(8 \cdot 300 - 2304) \cdot (8 \cdot 208 - 1600)}} = \frac{56}{78} = 0,71$$

$$r = 0,71 > 0,7067 \text{ pro } \alpha = 0,05$$

Na hladině $\alpha = 0,05$ zamítáme nulovou hypotézu. **Koeficient je statisticky významný.**

Rozsah výběru n	α	
	0,05	0,01
3	0,996 9	0,999 9
4	0,950 0	0,990 0
5	0,878 3	0,958 7
6	0,811 4	0,917 2
7	0,754 5	0,874 5
8	0,706 7	0,834 3
9	0,666 4	0,797 7
10	0,631 9	0,764 6

SPEARMANŮV KOEFICIENT POŘADOVÉ KORELACE

Spearmanův koeficient pořadové korelace se používá pro výpočet těsnosti závislosti:

- ❑ u znaků získaných na ordinální stupnici (ordinálních znaků)
- ❑ u souborů o nevelkém rozsahu (n menší než 20)
- ❑ jestliže znaky nemají (či nelze prokázat) normální rozložení četností

Vzorec pro výpočet Spearmanova koeficientu pořadové korelace:

$$r_{xy} = 1 - \frac{6 \cdot \sum (i_x - i_y)^2}{n(n^2 - 1)}$$

kde i_x resp. i_y je index pořadí znaků x resp. y

Příklad. Výpočet Spearmanova koeficientu pořadové korelace

Pořadí	x_i	y_i	i_x	i_y	$(i_x - i_y)^2$
1	7 2,5.	4 1.5	2,5	1,5	1
2	6 1.	8 7,5.	1	7,5	42,25
3	7 2,5.	6 3	2,5	3	0,25
4	8	8 7,5.	5,5	7,5	4
5	9	7 4,5.	8,5	4,5	16
6	8	8 7,5.	5,5	7,5	4
7	8	7 4,5.	5,5	4,5	1
8	8	4 1.5	5,5	1,5	16
9	9	8 7,5.	8,5	7,5	1
10	10 10.	10 10.	10	10	0
Σ	-	-	-	-	85,5

$$r = 1 - \frac{6 \cdot \sum (i_x - i_y)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 85,5}{10(100 - 1)} = 1 - \frac{513}{990} = 0,48$$

Spearmanův koeficient pořadové korelace

$$r = 0,48$$

Pearsonův koeficient součinné korelace

$$r = 0,46$$

POSOUZENÍ A INTERPRETACE ZÁVISLOSTI

...viz Pearsonův koeficient součinné korelace

Tab. XVIII.6. Kritické hodnoty $r_s(\alpha)$
Spearmanova korelačního koeficientu r_s ;
 $P\{|r_s| > r_s(\alpha)\} \leq \alpha$

n	α	
	0,05	0,01
5	0,900 0	—
6	0,828 6	0,942 9
7	0,745 0	0,892 9
8	0,690 5	0,857 1
9	0,683 3	0,816 7
10	0,636 4	0,781 8
11	0,609 1	0,754 5
12	0,580 4	0,727 3
13	0,554 9	0,697 8
14	0,534 1	0,674 7
15	0,517 9	0,653 6
16	0,500 0	0,632 4
17	0,485 3	0,615 2
18	0,471 6	0,597 5
19	0,457 9	0,582 5
20	0,445 1	0,568 4
21	0,435 1	0,554 5
22	0,424 1	0,542 6
23	0,415 0	0,530 6
24	0,406 1	0,520 0
25	0,397 7	0,510 0
26	0,389 4	0,500 2
27	0,382 2	0,491 5
28	0,374 9	0,482 8
29	0,368 5	0,474 4
30	0,362 0	0,466 5

Příklad. Výpočet Spearmanova koeficientu pořadové korelace

	A	B	C
1	VÝROBEK	ODBORNÍCI	LAICI
2	1	7	8
3	2	9	9
4	3	8	7
5	4	10	10
6	5	6	6
7	6	5	4
8	7	3	5
9	8	4	3
10	9	2	2
11	10	1	1
12			

Tab. XVIII.6. Kritické hodnoty $r_s(\alpha)$
Spearmanova korelačního koeficientu r_s ;
 $P\{|r_s| > r_s(\alpha)\} \leq \alpha$

n	α	
	0,05	0,01
5	0,900 0	—
6	0,828 6	0,942 9
7	0,745 0	0,892 9
8	0,690 5	0,857 1
9	0,683 3	0,816 7
10	0,636 4	0,781 8

F	G	H	I
i_x	i_y	$i_x - i_y$	$(i_x - i_y)^2$
7	8	-1	1
9	9	0	0
8	7	1	1
10	10	0	0
6	6	0	0
5	4	1	1
3	5	-2	4
4	3	1	1
2	2	0	0
1	1	0	0

$$r = 1 - \frac{6 \cdot \sum (i_x - i_y)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 8}{10(100 - 1)} = 1 - \frac{48}{990} = 0,95$$

Kritické hodnoty z tabulek $\alpha = 0,05$ 0,6364

$\alpha = 0,01$ 0,7818

Hypotézu $H_0 : \rho = 0$ o nezávislosti **zamítáme**

ANALÝZA JEDNOROZMĚRNÉHO SOUBORU

METODY DESKRIPTIVNÍ STATISTIKY

1. URČENÍ TYPU ŠKÁLY (nominální, ordinální, metrické)

- a) nominální + ordinální \Rightarrow *neparametrické stat. metody*
- b) metrické \Rightarrow *parametrické statistické metody*

2. ROZLOŽENÍ ČETNOSTÍ ZNAKŮ (NORMÁLNÍ ČI JINÉ)

- a) normální \Rightarrow *parametrické statistické metody*
- b) jiné \Rightarrow *neparametrické statistické metody*

3. VÝPOČET ZÁKLADNÍCH STATISTICKÝCH CHARAKTERISTIK

- a) míry centrální tendence
- b) míry variability
- c) míry závislosti

3. ANALYTICKÁ STATISTIKA

3.1 Věcná a statistická významnost

3.2 Metody testování statistických hypotéz

TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

POJMY: SOUBOR ZÁKLADNÍ A SOUBOR VÝBĚROVÝ

Pod pojmem *základní soubor* (generální soubor, Grundgesamtheit) rozumíme *soubor všech jedinců, na kterých bychom teoreticky měli šetření provádět* (což však obvykle nelze).

Musíme se proto spokojit s *omezeným počtem jedinců* (pozorování, jevů), takovýto soubor potom nazýváme *výběrovým souborem* (náhodný výběr, Stichprobe).

Z poznatků zjištěných u *výběrového souboru*, můžeme (při splnění statistických požadavků) činit závěry platné pro *základní soubor*.

Vysvětlení pojmů „soubory závislé a nezávislé“.

HYPOTÉZY

Hypotéza je dle KERLINGERA (1972) **podmíněný výrok o vztahu mezi dvěma nebo více proměnnými.**

Hypotézy jsou důležité a nepostradatelné prostředky vědeckého výzkumu, jsou pracovními nástroji teorie.

Kriteria dobrých hypotéz:

- 1. hypotézy jsou výroky o vztazích mezi proměnnými**
- 2. hypotézy obsahují proměnné, které lze dobře zjišťovat a měřit**
- 3. vztahy mezi proměnnými lze ověřovat**

PRACOVNÍ, VĚCNÁ A STATISTICKÁ HYPOTÉZA

1. Pracovní hypotéza - tvoří základy pro předvýzkum a jsou relativně všeobecně tvořeny, jsou subjektivními domněnkami o předmětu problému.

2. Výzkumná (věcná) hypotéza - zpřesněná výpověď k předmětu výzkumu odvozená z existujícího skutečného materiálu. Je to **domněnka** o existenci vztahu mezi dvěma či více proměnnými, ověřujeme ji prostřednictvím statistických hypotéz.

2. Statistická hypotéza je hypotetické tvrzení vyjádřené ve **statistických termínech** o relacích, vyvozených ze vztahů ve věcné hypotéze. Je to tedy jednoduše vyjádřená domněnka, jejíž pravdivost lze ověřovat (testovat).

Při srovnání tří druhů hypotéz se ukazuje, že stupeň obecnosti výpovědí klesá od pracovní přes výzkumnou ke statistické hypotéze, zatímco stupeň její přesnosti vzrůstá.

NULOVÁ A ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA

Základním typem úvahy při statistickém testování tzv. *nulová hypotéza* (H_0).

Podstatou *nulové hypotézy* je odůvodněný předpoklad, že mezi dvěma jevy *není statisticky významný rozdíl* (rozdíl je nulový).

Jako *nulová hypotéza* se označuje domněnka, že dva statistické soubory *se shodují* v určitých statistických parametrech (např. AP) nebo v rozdělení četností.

V případě *zamítnutí nulové hypotézy* přijímáme tzv. *alternativní hypotézu* H_A , tedy předpoklad, že rozdíl existuje.

K rozhodnutí, zda hypotézu zamítáme, či nezamítáme použijeme tzv. *testovací metody*.

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_A: \mu \neq \mu_0 \quad ; \quad H_A: \mu > \mu_0 \quad ; \quad H_A: \mu < \mu_0$$

Hypotéza je testována (přezkušována, ověřována) pomocí tzv. **testovacích metod** a **zamítá se** právě tehdy, je-li zjištěn výsledek, který je při platnosti **nulové hypotézy** nepravděpodobný.

Co je považováno za nepravděpodobný výsledek, musí být stanoveno předem (např. tělesná výška mužů a žen je stejná).

Výsledky testování jsou posuzovány na tzv. **hladině významnosti**.

Úroveň hladiny významnosti $\alpha = 0,05$ znamená, že nulová hypotéza se zamítá, když je pravděpodobnost, že nastane nulová hypotéza, **menší než 5%** (interpretace pro $\alpha = 0,01$).

V tomto případě je přijata **alternativní hypotéza**.

Nejčastěji srovnáváme **aritmetické průměry** dvou výběrových souborů (o rozsahu n_1, n_2).

1. NOMINÁLNÍ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

1. Lyžaři



2. Lyžaři



Znak - kouření

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory (znaky nabývají právě dvou hodnot)	Zkouška významnosti rozdílů souborů	X^2 -čtyřpolní test (Fischerův test, čtyřpolní tabulka)
Dva nezávislé soubory (znaky nabývají více hodnot)	Zkouška významnosti rozdílů souborů	X^2 -vícepolní test (kontingenční tabulka)
Dva závislé soubory (znaky nabývají právě dvou hodnot)	Zkouška významnosti změn	X^2 -Mc Nemarův test
Dva závislé soubory	Hodnocení závislosti	Koef. kontingence C

PŘÍKLADY

2. ORDINÁLNÍ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

1. Gymnasté A



2. Gymnasté B



Znak - body

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory	Test rovnosti centrálních tendencí	Medianový test (jednoduchý), U-test Mann-Whitneyho, Kolmogorov-Smirnovův test, Marshallův test
Dva závislé soubory	Test rovnosti centrálních tendencí	Znaménkový test, Wilcoxonův test
Více nezávislých souborů	Test rovnosti centrálních tendencí	Medianový test (rozšířený), H-test Kruskal-Wallisův (analýza rozptylu)
Dva závislé soubory	Hodnocení míry závislosti	Spearmanův resp. Kendallův koeficient korelace
Více závislých souborů	Hodnocení míry závislosti	Friedmanova analýza rozptylu

PŘÍKLADY

3. METRICKÁ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY I

Tenisté



Tenistky



**Znak:
TV**

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory	Zkouška rovnosti rozptylů (homogenita)	F-test
Dva nezávislé soubory	Zkouška rovnosti středních hodnot	t-test
Dva nezávislé soubory	Zkouška nezávislosti korelací	Korelační test
Dva závislé soubory	Zkouška rovnosti rozptylů (homogenita)	F-test

PŘÍKLADY

3. METRICKÁ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY II

Tenisté

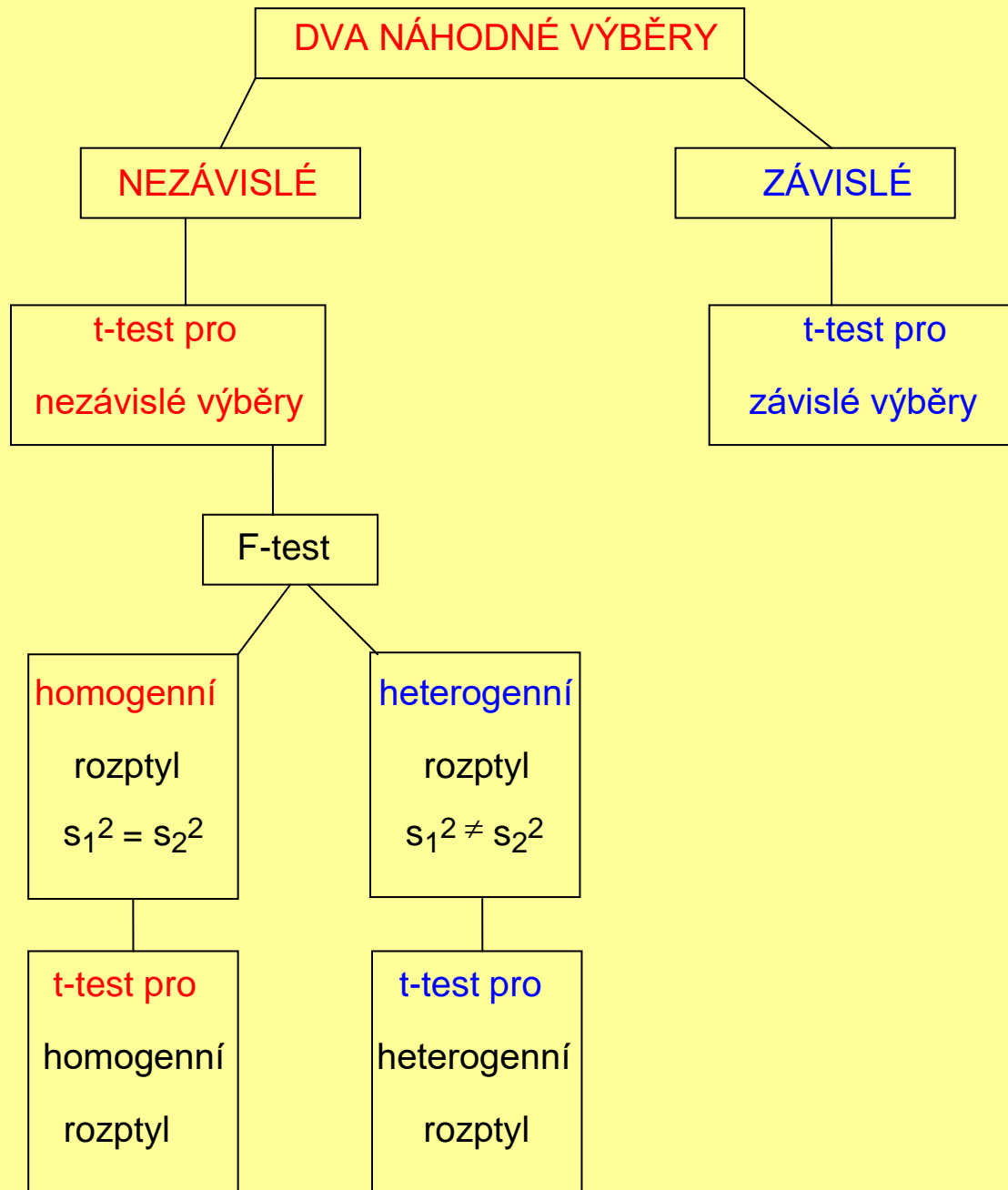
	PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
	Dva závislé soubory	Zkouška rovnosti středních hodnot	Diferenční t-test (párový)
	Dva závislé soubory	Hodnocení závislosti	Koef. součinné korelace a regrese
	Více nezávislých souborů	Zkouška rovnosti průměrů	Analýza rozptylu, Duncanův test pořadí, Bartlettův test
	Více nezávislých souborů	Zkouška rovnosti korelačních koeficientů	Test homogeneity

Tenistky

**Znak:
TV**

PŘÍKLADY

ROZHODOVACÍ DIAGRAM PRO UŽITÍ t-TESTU



STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

- dva závislé soubory
- zkouška rovnosti středních hodnot

PŘÍKLAD – Zjistěte, zda se na automobilu určité značky sjíždějí obě přední pneumatiky stejně rychle

číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6
leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4
rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2

$$H_0: \mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_A: \mu = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$T = \frac{|X - \mu|}{s} \sqrt{n}$$

$$T < t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

hypotézu nelze zamítnou

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6
leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4
rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{6} (0,3 - 0,1 + 0,2 - 0,2 + 0,1 + 0,2) = \frac{0,5}{6} = \underline{\underline{0,0833}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{0,2167^2 + (-0,1833)^2 + 0,1167^2 + (-0,2833)^2 + 0,0167^2 + 0,1167^2}{5} =$$
$$= \frac{0,18833}{5} = 0,0377$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,0377} = \underline{\underline{0,1941}}$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

$$t_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6-1; 1-\frac{0,05}{2}} = t_{5; 0,975} = 2,571$$

= > z tabulek

$$T = \frac{|X - \mu|}{s} \sqrt{n} = \frac{0,0833 - 0}{0,1941} \sqrt{6} = 1,0518 < 2,571$$

Protože $1,0518 < 2,571$, nelze na základě získaných dat zamítnout hypotézu, že se obě přední pneumatiky sjíždějí stejně rychle.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	číslo automobilu	1	2	3	4	5	6	
2	pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6	
3	leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4	
4	rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2	
5								

Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu

Vstup

1. soubor:

2. soubor:

Hypotetický rozdíl středních hodnot:

Popisky

Alfa:

Možnosti výstupu

Výstupní oblast:

Nový list:

Nový sešit

Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu

	<i>pravá pneumatika</i>	<i>leva pneumatika</i>
Stř. hodnota	1,5	1,41666667
Rozptyl	0,24	0,10966667
Pozorování	6	6
Pears. korelace	0,961571662	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	5	
t Stat	1,051757905	
P(T<=t) (1)	0,17053101	
t krit (1)	2,015048372	
P(T<=t) (2)	0,34106202	
t krit (2)	2,570581835	

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

- dva nezávislé soubory
- test rovnosti středních hodnot

PŘÍKLAD – U studentů rozdělených do dvou skupin byl zaznamenán počet leh-sedů za 1 minutu. Jsou obě skupiny stejně výkonné?

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$|T| < t_{n+m-2; 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{hypotézu nelze zamítnou}$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$n_1=6 \quad n_2=5 \quad AP_X=57 \quad AP_Y=51,6 \quad s_X^2=12,8 \quad s_Y^2=7,3$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} = \\ &= \frac{57 - 51,6}{\sqrt{(6-1)12,8 + (5-1)7,3}} \sqrt{\frac{6 \cdot 5 \cdot (6+5-2)}{6+5}} = \\ &= \frac{5,4}{\sqrt{62,5 + 29,2}} \sqrt{24,55} = 2,79 \end{aligned}$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t -test

$$t_{m+m-2; 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6+5-2; 1-\frac{0,05}{2}} = t_{9; 0,975} = 2,262 = > \text{ z tabulek}$$

$$|T| = 2,79 \geq 2,262$$

Protože $2,79 \geq 2,262$ zamítáme hypotézu, že se obě skupiny studentů jsou stejně výkonné.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1. skupina	62	54	55	60	53	58	
2	2. skupina	52	56	49	50	51		
3								

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

Vstup

1. soubor:

2. soubor:

Hypotetický rozdíl středních hodnot:

Popisky

Alfa:

Možnosti výstupu

Výstupní oblast:

Nový list:

Nový sešit

OK
Storno
Nápověda

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	1. skupina	2. skupina
Stř. hodnota	57	51,6
Rozptyl	12,8	7,3
Pozorování	6	5
Společný rozptyl	10,35555556	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	9	
t Stat	2,77122216	
P(T<=t) (1)	0,010855041	
t krit (1)	1,833112923	
P(T<=t) (2)	0,021710083	
t krit (2)	2,262157158	

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

- dva nezávislé soubory
- zkouška rovnosti rozptylů

PŘÍKLAD – Na základě dat uvedených v předchozím příkladě rozhodněte, zda oba základní soubory mají stejné rozptyly.

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$Z = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \quad \text{volím tak, aby } Z > 1$$

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_A: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

$$Z < F_{n-1, m-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{hypotézu nelze zamítnou}$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$n=6 \quad m=5 \quad s_x^2 = 12,8 \quad s_y^2 = 7,3$$

$$Z = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{12,8}{7,3} = 1,753$$

$$F_{n-1, m-1; 1-\frac{\alpha}{2}} = F_{6-1, 5-1; 1-\frac{0,05}{2}} = F_{5, 4; 0,975} = 9,36 \Rightarrow \text{z tabulek}$$

$$Z = 1,753 < 9,36$$

Protože $1,753 < 9,36$ nelze zamítnout hypotézu o shodnosti rozptylů.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1. skupina	62	54	55	60	53	58	
2	2. skupina	52	56	49	50	51		

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

Vstup

1. soubor: \$A\$1:\$G\$1

2. soubor: \$A\$2:\$F\$2

Popisky

Alfa: 0.05

Možnosti výstupu

Výstupní oblast:

Nový list:

Nový sešit

OK

Storno

Nápověda

Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	1. skupina	2. skupina
Stř. hodnota	57	51.6
Rozptyl	12.8	7.3
Pozorování	6	5
Rozdíl	5	4
F	1.753424658	
P(F<=f) (1)	0.303172533	
F krit (1)	6.256056502	

Děkuji
za pozornost