vektory

Kormidelník se s lodí potřebuje dostat přímo naproti na druhý břeh vzdálený 50 m. Jeho loď může jet rychlostí 3 m·s^{-1}, fouká mu však protivítr o rychlosti 1 m·s^{-1}. Řeka, kterou musí přeplout, teče rychlostí 2 m·s^{-1}. Pod jakým úhlem (od nejkratší spojnice břehů) musí kormidelník vyjet, aby doplul přesně tam, kam chce? Jak dlouho mu bude jeho plavba trvat? Jak velká je jeho rychlost vůči vodě a vůči břehu?

s = 50 m
v = 3 m.s^{-1}
w = 1 m.s^{-1}
u = 2 m.s^{-1}
α = ?
t = ?
V_v = ?
V_z = ?

Protivítr sníží rychlost lodi o 1 m.s^{-1}:

$$v - w = (3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) - (1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Loď se pohybuje vpřed rychlostí 2 m.s^{-1}a kolmo do boku také rychlostí 2 m.s^{-1}. Z náčrtku vyplývá, jaký bude úhel, pod kterým musí kormidelník vyjet:

$$tg\,\alpha = \frac{u}{v-w} = \frac{(2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})}{(2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})} = 1$$

$$\alpha = 45°$$

Rychlosti pohybu lodě ve vzájemně kolmých směrech se vzájemně neovlivňují. Proto dobu potřebnou na překonání řeky můžeme vypočítat, aniž bychom brali v úvahu rychlost řeky:

$$v = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

V našem případě:

$$t = \frac{s}{v-w} = \frac{(50\,\mathrm{m})}{(2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})} = 25\,\mathrm{s}$$

Při zvažování rychlosti lodě vůči vodě si pozorovatele můžeme představit jako posádku jiné lodi, která se jen nechává unášet proudem. Vůči této posádce se kormidelník s lodí pohybuje rychlostí V_v = 2 m.s^{-1}.

Pozorovatel spojený se zemí vidí však rychlost lodi:

$$V_z = u^2 + (v-w)^2$$

$$V_z = \sqrt{(2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2 + (2\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})^2} = 2{,}83\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Kormidelník musí od břehu odrazit pod úhlem 45º a řeku přepluje za 25 s. Pro pozorovatele spojeného s řekou se loď pohybuje rychlostí 2 m.s^{-1}, avšak pro pozorovatele na břehu se loď pohybuje rychlostí 2,83 m.s^{-1}.

rovnoměrný přímočarý pohyb

V házené, po vážnějším provinění se proti pravidlům následují penalty z čáry vzdálené 7 m od branky. Po přestupku se na branku hází z 9 m vzdálenosti. Brankářova reakční doba na zrakový vjem je asi 0,2 s. Jakou má šanci chytit míč z jedné a z druhé vzdálenosti, jestliže házenkář hodí míč rychlostí 100 $km.h^{-1}$?

$s_1 = 7$ m

$s_2 = 9$ m

$t_r = 0{,}2$ s

$v = 100\ km.h^{-1}$

$t_1 = ?$

$t_2 = ?$

Převedeme:

$v = 100\ km.h^{-1} = 27{,}8\ m \cdot s^{-1}$

Předpokládejme, že míč letí rovnoměrně přímočaře. Platí tedy:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t_1 = \frac{(7\,\mathrm{m})}{(27{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})} = 0{,}25\,\mathrm{s}$$

$$t_2 = \frac{(9\,\mathrm{m})}{(27{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})} = 0{,}32\,\mathrm{s}$$

Oba časy jsou delší než brankářova reakční doba, v obou případech je tedy určitá šance na chycení míče. První čas se však od této doby odchyluje jen o 0,05s, proto úspěch brankaře z velké části bude záviset také na složitosti zákroku, který daná penalta vyžaduje.

průměrná rychlost, frekvence

Závodníci na čtyřkajaku jedou trať dlouhou 1000 m průměrnou rychlostí 18 $km.h^{-1}$. Průměrné tempo pádlování je 102 záběrů za minutu. Kolik záběrů musí udělat, než dorazí do cíle?

$s = 1000$ m

$v_p = 18\ km.h^{-1}$

f = 102 záběrů za min.

N = ?

Převedeme:

$$v_p = 18\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} = 5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$f = 102\,\mathrm{min}^{-1} = 1{,}7\,\mathrm{s}^{-1}$$

Abychom mohli určit počet záběrů, musíme vědět, jak dlouho závodníci celou trať jedou:

$$v_p = \frac{s}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v_p} = \frac{(1000\,\mathrm{m})}{(5\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1})} = 200\mathrm{s}$$

Počet záběrů je tedy

$$N = t\,f = (200\,\mathrm{s})(1{,}7\,\mathrm{s}^{-1}) = 340$$

Závodníci musí během závodu provést 340 záběrů.

rovnoměrný přímočarý pohyb

Sprinteři na 100 m zvyšují frekvenci kroků přibližně do 60. metru. Poté špičkoví závodníci udělají za 1 s až 5 kroků. Jeden takovýto krok může být dlouhý i 2,4 m. Jakou rychlostí a za jak dlouho uběhne sprinter těchto posledních 40 m?

s = 60 m
d = 2,4 m
f = 5 kroků za 1 s
v = ?
t = ?

Z počtu kroků za sekundu a jejich délky zjistíme dráhu *l*, kterou sprinter uběhne za 1 s:

$l = 5d = 5(2{,}4\,\mathrm{m}) = 12\,\mathrm{m}$

Sprinter posledních 40 m tedy běží průměrnou rychlostí 12,0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Sprinter běží rovnoměrně přímočaře, odtud doba *t*:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{(40\,\mathrm{m})}{(12\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})} = 3{,}33\,\mathrm{s}$$

Posledních 40 m, které sprinter běží průměrnou rychlostí 12,0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, urazí za 3,3 s.

průměrná rychlost

Rychlost běžce v průběhu času je zaznamenána v grafu. Jakou celkovou dráhu urazil? Vypočítejte jeho průměrnou rychlost.

Dráha je rovna obsahu plochy pod křivkou rychlosti:

$$s_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{s}_2 = 8 \cdot 3 = 24\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{s}_3 = 4 \cdot 3 + \frac{5 \cdot 4}{2} = 12 + 10 = 22\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{s} = (3\,\mathrm{m}) + (24\,\mathrm{m}) + (22\,\mathrm{m}) = 49\,\mathrm{m}$$

Průměrná rychlost:

$$v_p = \frac{\sum s}{\sum t} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{(49\,\mathrm{m})}{(14\,\mathrm{s})} = 3{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Běžec urazil 49 m průměrnou rychlostí 3,5 $\mathrm{m.s^{-1}}$.

zrychlený pohyb, průměrná rychlost

Drag racing jsou závody, při nichž soupeří vždy dvojice vozů na zcela rovné dráze o délce 400 – 800 m. Vozy Pro Stock můžou z nulové rychlosti dosáhnout 300 km.h^{-1} za 6 s. Jaké přetížení (v násobku *g*) přitom působí na jezdce? Za jak dlouho vůz Pro Stock ujede závodní trať dlouhou 400 m, jestliže zrychluje do chvíle, než dosáhne rychlosti 300 km.h^{-1} a potom až do cíle jede stále touto rychlostí? Jaká je jeho průměrná rychlost?

v = 300 km.h^{-1}

t_1 = 6 s

a = ?

s = 400 m

t = ?

v_p = ?

Převedeme:

v = 300 km.h^{-1} = 83,33 m.s^{-1}

Přetížení působící na jezdce je rovno zrychlení, se kterým se vůz rozjíždí.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(83{,}33\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})}{(6\,\mathrm{s})} = 13{,}89\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1{,}42\,g$$

Na závodníka působí přetížení 1,42 *g*.

Závodník jede úsek s_1 rovnoměrně zrychleně po dobu t_1 a rovnoměrně přímočaře úsek s_2 po dobu t_2.

$$t = t_1 + t_2 = t_1 + \frac{s_2}{v}$$

$$s_2 = s - s_1 = s - \frac{1}{2}at_1^{\,2} = (400\,\mathrm{m}) - \frac{1}{2}(13{,}89\,\mathrm{m \cdot s^{-2}})(6\,\mathrm{s})^2 = 149{,}98\,\mathrm{m}$$

$$t = (6\,\mathrm{s}) + \frac{(149{,}98\,\mathrm{m})}{(83{,}33\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})} = 7{,}80\,\mathrm{s}$$

Celou trať závodník ujede za 7,80 s.

Průměrná rychlost je rovna:

$$v_p = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{s}{t} = \frac{(400\,\mathrm{m})}{(7{,}80\,\mathrm{s})} = 51{,}28\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} = 184{,}61\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Závodník celou trať projel průměrnou rychlostí 184,61 km.h^{-1}.

zrychlený pohyb

John Force vytvořil 11. března 1999 rekord v dragsteru Ford Mustang 99. Z klidového stratu dosáhl na 402 m dlouhém úseku rychlosti 521,507 km.h^{-1}. S jak velkým zrychlením se John rozjížděl?

s = 402 m

v = 521,507 km.h^{-1}

a = ?

Převedeme:

v = 521,507 km.h^{-1} = 144,86 m·s^{-1}

Pro zrychlení platí:

$$a = \frac{v}{t}$$

Čas vyjádříme ze vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$a = \frac{v}{\sqrt{\frac{2s}{a}}}$$

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{\left(144{,}86\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2}{2\left(402\,\mathrm{m}\right)} = 26\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} = 2{,}96g$$

John se rozjížděl se zrychlením 2,96 *g*.

volný pád

Jedny z parašutistických závodů spočívají v co nejpřesnějším přistání po výskoku z výšky 1000 m. Úkolem soutěžících je dotknout se špičkou nebo patou nohy žlutého terče o průměru 3 cm. Parašutista rozbalí padák 3 s po výskoku. V té chvíli začne vát západní vítr rychlostí 1 m.s^{-1}. Po 20 s se vítr stočí a až do přistání fouká jižní vítr o rychlosti 0,5 m.s^{-1}. Pro zjednodušení předpokládejme, že po otevření padáku parašutista klesá s konstantní rychlostí 5,0 m.s^{-1}. Také počítejme s tím, že vyskočil přímo nad terčem s nulovou rychlostí v horizontální rovině. Jak daleko od terče by parašutista přistál, kdyby působení větru nevyrovnával? O kolik sekund déle bude parašutista padat v případě, že foukají tyto boční větry, než v případě bezvětří?

s = 1000 m
t_1 = 3 s
v_z = 1 m.s^{-1}
t_z = 20 s
v_j = 0,5 m.s^{-1}
$t_j = t - t_1 - t_z$
v_p = 5 m.s^{-1}
d = ?
Δt = ?

V prvních třech sekundách padá parašutista volným pádem. Klesne přitom o

$$s_1 = \frac{1}{2} g t_1^{\ 2} = \frac{1}{2}\left(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)(3\,\mathrm{s})^2 = 44{,}15\,\mathrm{m}$$

V průběhu následujících 20 s odnese západní vítr parašutistu na východ od terče do vzdálenosti:

$$s_z = v_z\, t_z = \left(1\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)(20\mathrm{s}) = 20\mathrm{m}$$

Během toho parašutista klesne o

$$s_2 = v_p t_z = \left(5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)(20\,\mathrm{s}) = 100\,\mathrm{m}$$

Po zbytek doby vane jižní vítr. Abychom mohli určit tuto dobu, musíme zjistit, kolik metrů bude ještě parašutista padat:

$$s_3 = s - s_1 - s_2 = (1000\,\mathrm{m}) - (44{,}15\,\mathrm{m}) - (100\,\mathrm{m}) = 855{,}85\,\mathrm{m}$$

Tuto výšku parašutista zdolá za čas

$$t_j = \frac{s_3}{v_p} = \frac{(855{,}85\,\mathrm{m})}{\left(5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)} = 171{,}17\,\mathrm{s}$$

Po tuto dobu působí na parašutistu jižní vítr, který ho odvane na sever o

$$s_j = v_j\, t_j = \left(0{,}5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)(171{,}17\,\mathrm{s}) = 85{,}585\,\mathrm{m}$$

Výsledná vzdálenost *d* parašutisty od středu terče je

$$d = \sqrt{s_z^{\ 2} + s_j^{\ 2}} = \sqrt{(20\,\mathrm{m})^2 + (85{,}59\,\mathrm{m})^2} = 87{,}90\,\mathrm{m}$$

Parašutista by dopadl 87,90 m daleko od terče.
Pohyby v horizontálním a vertikálním směru se vzájemně neovlivňují. Proto parašutista dopadne v obou případech za stejný čas.

svislý vrh vzhůru

Krasobruslař potřebuje pro obrat o 360º ve výskoku 0,22 s. Jak vysoko musí vyskočit, aby zvládl trojitý skok, a jaká je přitom úhlová rychlost jeho rotace?

T= 0,22 s

h_3 = ?

ω = ?

Při výskoku se těžiště těla pohybuje po křivce svislého vrhu vzhůru. Během stoupání musí krasobruslař provést 1,5 otočky, taktéž při sestupu. Doba výstupu, tedy i pádu, musí být:

$$t = 1{,}5T = 1{,}5(0{,}22\,\mathrm{s}) = 0{,}33\,\mathrm{s}$$

Výška výskoku:

$$h_3 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\left(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)\left(0{,}33\,\mathrm{s}\right)^2 = 0{,}53\,\mathrm{m}$$

Doba jedné otočky je T = 0,22 s, pro úhlovou rychlost tedy platí:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{(0{,}22\,\mathrm{s})} = 28{,}55\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Krasobruslař musí vyskočit do výšky 0,53 m, aby zvládl trojitý skok. Přitom se otáčí s úhlovou rychlostí 28,55 rad· s^{-1}.

svislý vrh vzhůru

Volejbalista při přihrávce odbije míč do jisté výšky. Chce-li, aby míč letěl dvakrát déle a smečař tak měl dost času na výskok, kolikrát výš musí míč vystoupat? Tuto výšku počítejme od místa, ve kterém je míč odbit. Dále předpokládejme, že míč je smečařem odbit, když klesne do počáteční výšky.

$t_2 = 2t_1$

$h_2 = xh_1$

$x = ?$

Let míče je šikmý vrh vzhůru. Ten můžeme rozložit do dvou vzájemně nezávislých os x a y. Pro řešení této úlohy nás zajímá pohyb v ose y, kde se míč pohybuje rovnoměrně zpomaleně do maximální výšky a potom rovnoměrně zrychleně klesá.

Vyjdeme ze vztahu:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Srovnáme maximální výšku h_{1max} a h_{1max}, které míč dosáhne v jednom a v druhém případě. Jedna a druhá doba výstupu je:

$$t_{h1} = \frac{1}{2} t_1$$

$$t_{h2} = \frac{1}{2} t_2$$

$$t_2 = 2t_1$$

$$2t_{\mathrm{h2}} = 2(2t_{\mathrm{h1}})$$

$$t_{\mathrm{h2}} = 2t_{\mathrm{h1}}$$

Pro okamžitou rychlost míče při vrhu vzhůru platí:

$$v = v_0 - g t_h$$

V nejvyšším bodě trajektorie má míč okamžitou rychlost $v = 0\ \mathrm{m.s^{-1}}$, odtud:

$$\left(0\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right) = v_0 - g t_h$$

$$v_0 = g t_h$$

Nyní můžeme dosadit do prvního vztahu:

$$h_{1\max} = v_{01} t_{\mathrm{h1}} - \frac{1}{2} g t_{\mathrm{h1}}{}^2$$

$$h_{1\max} = (g t_{\mathrm{h1}}) t_{\mathrm{h1}} - \frac{1}{2} g t_{\mathrm{h1}}{}^2 = \frac{1}{2} g t_{\mathrm{h1}}{}^2$$

$$h_{2\max} = \frac{1}{2} g t_{\mathrm{h2}}{}^2 = \frac{1}{2} g (2t_{\mathrm{h1}})^2 = 2 g t_{\mathrm{h1}}{}^2$$

$$x = \frac{h_{2\max}}{h_{1\max}} = \frac{2 g t_{\mathrm{h1}}{}^2}{\frac{1}{2} g t_{\mathrm{h1}}{}^2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

Aby míč letěl 2krát déle, musí ho volejbalista odbít 4krát výš.

šikmý vrh vzhůru

Horizontální rychlost těch nejlepších skokanů do dálky dosahuje až 10,7 m.s^{-1}. Jak velká je při odrazu vertikální rychlost, naměří-li rozhodčí délku skoku 8,8 m? Pro zjednodušení předpokládejme, že těžiště atleta je ve chvíli odrazu a doskoku ve stejné výšce.

$v_x = 10,7$ m.s^{-1}

s = 8,8 m

v_y = ?

Let atleta můžeme rozložit do dvou vzájemně kolmých směrů. Ve směru horizontálním (osa x) jde o pohyb rovnoměrný přímočarý. Odtud zjistíme tedy, jak dlouho skok trval:

$$v_x = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{(8{,}8\,\mathrm{m})}{(10{,}7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})} = 0{,}82\,\mathrm{s}$$

Ve směru vertikálním se po tuto dobu skokan pohybuje nejdříve rovnoměrně zpomaleně s počáteční rychlostí v_y, potom stejně dlouho rovnoměrně zrychleně volným pádem. Těsně před dopadem má skokan v této ose opět rychlost v_y. Rychlost v_y tedy zjistíme z volného pádu, který trval po dobu $\frac{t}{2}$:

$$v_y = g\frac{t}{2} = (9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})\frac{(0{,}82\,\mathrm{s})}{2} = 4{,}02\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Vertikální rychlost atleta při odrazu má velikost 4,02 m.s^{-1}.

dostředivé zrychlení

Rychlobruslař jede po kruhové části dráhy stálou rychlostí 12 m·s^{-1}. Velikost dostředivého zrychlení je 4,2 m·s^{-1}. Určete poloměr dráhy a dobu, za kterou rychlobruslař ujede tuto půlkruhovou část dráhy.

v = 12 m·s^{-1}

a_d = 4,2 m·s^{-2}

r = ?

t = ?

Poloměr vypočítáme ze vztahu pro dostředivé zrychlení:

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{v^2}{a_d} = \frac{(12\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2}{(4{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})} = 34{,}29\,\mathrm{m}$$

Protože obvodová rychlost v je stálá, použijeme vztah pro rovnoměrný pohyb:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi r}{t}$$

$$t = \frac{\pi r}{v} = \frac{3{,}14(34{,}29\,\mathrm{m})}{(12\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})} = 8{,}98\,\mathrm{s}$$

Poloměr zakřivení dráhy je 34,29 m. Na projetí zakřivené části dráhy rychlobruslař potřebuje 8,98 s.

dostředivé zrychlení

Podle letecké normy nesmí na pilota působit větší přetížení než 5, 95 g. Jaký nejmenší poloměr může mít zatáčka, kterou pilot proletí rychlostí 700 km·h^{-1}, aby se nedostal mimo normu? Jak dlouho touto zatáčkou poletí, chce-li změnit směr o 90°?

a = 5,95 g

v = 700 km.h^{-1}

α = 90º

r = ?

t = ?

Převedeme:

v = 700 km.h^{-1} = 194,44 m.s^{-1}

Na pilota v zatáčce působí dostředivá síla, tedy i dostředivé zrychlení, které nesmí překročit normu:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{v^2}{a} = \frac{\left(194{,}44\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{5{,}95\,g} = \frac{\left(194{,}44\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)^2}{5{,}95\left(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)} = 647{,}71\,\mathrm{m}$$

Při změně směru o 90º proletí pilot v zatáčce dráhu:

$$s = \frac{o}{4} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\cdot 3{,}14\left(647{,}71\,\mathrm{m}\right)}{4} = 1016{,}90\,\mathrm{m}$$

Letí-li rychlostí 194,44 m.s^{-1}, tuto dráhu urazí za čas t:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{\left(1016{,}90\,\mathrm{m}\right)}{\left(194{,}44\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)} = 5{,}23\,\mathrm{s}$$

Letí-li pilot rychlostí 700 km.h^{-1}, může proletět zatáčku s minimálním poloměrem 647,71 m. Změna směru o 90º mu v tomto případě bude trvat 5,23 s.

síly

Surfař o hmotnosti 70 kg se rozjíždí na surfu o hmotnosti 10 kg. Jeho zrychlení je 1,5 m.s^{-2}. Jak velká je výslednice sil působících na surf?

$m_1 = 70$ kg

$m_2 = 10$ kg

a = 1,5 m.s^{-2}

F = ?

Výslednice sil *F* dává soustavě surfaře a surfu o hmotnosti $m_1 + m_2$ zrychlení 1,5 m.s^{-2}:

$$F = ma = (m_1 + m_2)a = [(70\,\text{kg}) + (10\,\text{kg})](1{,}5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}) = 120\,\text{N}$$

Výslednice sil má velikost 120 N.

třecí síla

Jak velký musí být součinitel smykového tření mezi podrážkou boty a podložkou, aby se sprinter mohl rozběhnout s horizontálním zrychlením 1,2 m·s^{-2}?

$a_x = 1{,}2$ m·s^{-2}

f = ?

Třecí síla mezi podrážkou a podložkou musí být větší, minimálně rovna x-ové složce svalové síly, která je vyvíjena ve fázi extenze v kloubech této dolní končetiny:

$$F_t \geq F_{svx}$$

$$fF_N \geq ma_x$$

$$fmg \geq ma_x$$

$$f \geq \frac{a_x}{g}$$

$$f \geq \frac{(1{,}2\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{(9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2})}$$

$$f \geq 0{,}12$$

Součinitel smykového tření musí být minimálně 0,12.

třecí síla

Kámen na curling je vyrobený ze žuly a jeho hmotnost je 19, 96 kg. Hráč chce poslat kámen tak, aby se po 30 m zastavil. Jakou počáteční rychlost mu musí dát, je-li součinitel smykového tření mezi kamenem a ledem 0,1?

m = 19,96 kg

s = 30 m

f = 0,1

v_0 = ?

Pro velikost třecí síly působící na kámen platí:

$$F_t = fF_N = fmg$$

Tato síla brzdí kámen o hmotnosti *m* se zpomalením *a*. Můžeme ji tedy také vyjádřit takto:

$$F_t = ma$$

Odtud:

$$fmg = ma$$

$$fg = a$$

Nyní musíme vyjádřit *a*, které neznáme, něčím známým. Využijeme brzdné dráhy:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2s}{t^2}$$

Dále vyjdeme ze vztahu:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-v_0}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-v_0}{a}$$

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2s}{\left(\dfrac{-v_0}{a}\right)^2} = \frac{2sa^2}{v_0^2}$$

$$a = \frac{v_0^2}{2s}$$

$$fg = a = \frac{v_0^2}{2s}$$

$$v_0 = \sqrt{2sfg} = \sqrt{2(30\,\mathrm{m})(0{,}1)(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})} = 7{,}67\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Hráč musí kámen poslat rychlostí 7,67 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

nakloněná rovina

Lyžař stojí na svahu a chce se rozjet bez odpichování holemi. Jaký musí být sklon svahu, je-li sníh tvrdý se součinitelem smykového tření 0,03 a je-li sníh vlhký se součinitelem smykového tření 0,15? Lyžař má i s vybavením hmotnost 90 kg.

$f_1 = 0{,}03$

$f_2 = 0{,}15$

$m = 90$ kg

$\alpha_1 = ?$

$\alpha_2 = ?$

Aby se lyžař rozjel, musí být síla F, která způsobuje dopředný pohyb, větší než třecí síla F_t, která působí opačným směrem:

$F > F_t$

$$F = F_g \sin\alpha = mg \sin\alpha$$

$$F_t = fF_N = fF_g \cos\alpha = fmg \cos\alpha$$

Při jakém úhlu si budou tyto síly rovny?

$$F = F_t$$

$$mg \sin\alpha = fmg \cos\alpha$$

$$\mathrm{tg}\alpha = f$$

Pro zadané kvality sněhu vypočítáme minimální úhly:

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = f_1 = 0{,}03$$

$$\alpha_1 = 1{,}72°$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = f_2 = 0{,}15$$

$$\alpha_2 = 8{,}53°$$

Je-li sníh tvrdý, stačí na rozjetí sklon svahu větší než 1,72°, je-li však sníh vlhký, svah musí mít sklon větší než 8,53°.

nakloněná rovina

Jakého největšího zrychlení může cyklista dosáhnout při rozjezdu do kopce se sklonem 10˚, je-li jeho maximální zrychlení na rovině 2 m·s^{-1}, za předpokladu, že se vnější podmínky nezmění?

$\alpha = 10^o$

$a_1 = 2$ m.s^{-1}

$a_2 = ?$

Na rovině je výsledná urychlující síla výslednicí svalové síly a odporových sil (odpor prostředí, odpor valení kol, odpor v ložiscích, …):

$$F_1 = F_{sv} - F_{od}$$

$$ma_1 = F_{sv} - F_{od}$$

Na nakloněné rovině přibude k již uvedeným odporům složka tíhové síly F_d působící proti směru jízdy, jejíž velikost je:

$$F_d = mg\sin\alpha$$

Výslednou urychlující sílu F_2 tedy vyjádříme::

$$F_2 = F_{sv} - F_{od} - F_d$$

$$ma_2 = F_{sv} - F_{od} - mg\sin\alpha = ma_1 - mg\sin\alpha$$

$$a_2 = a_1 - g\sin\alpha = \left(2\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right) - \left(9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\right)\sin 10° = 0{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Při rozjezdu do kopce se sklonem 10º může cyklista jet s maximálním zrychlením 0,3 m·s^{-2}.

moment síly

Při jízdě na kole je svalová síla dolních končetin optimálně využita, když výslednice působí v každém okamžiku ve směru tečny ke kruhové dráze, po které se pedál pohybuje. Cyklista působí silou o velikosti 150 N na pedál ve fázi, kdy je klika od vertikály pootočena o 45º. Jaký je rozdíl v jejím otáčivém účinku v případě, že má tato síla optimální směr a v případě, že tato síla směřuje přímo dolů rovnoběžně s vertikálou? Délka kliky je 15 cm.

F = 150 N

$\alpha_1 = 90^\circ$

$\alpha_2 = 45^\circ$

d = 15 cm

$M_1 - M_2 = ?$

Převedeme:

d = 15 cm = 0,15 m

Fyzikální veličina vyjadřující otáčivý účinek síly se nazývá moment síly:

$M = F \times d = Fd \sin \alpha = Fr$

kde *r* je kolmá vzdálenost vektorové přímky síly od osy otáčení.

$r_1 = d \sin \alpha_1$

$r_2 = d \sin \alpha_2$

$M_1 - M_2 = Fr_1 - Fr_2 = F(d \sin \alpha_1 - d \sin \alpha_2)$

$M_1 - M_2 = (150\,N)[(0{,}15\,\mathrm{m})\sin 90^\circ - (0{,}15\,\mathrm{m})\sin 45^\circ] = (150\,\mathrm{N})[(0{,}15\,\mathrm{m}) - (0{,}11\,\mathrm{m})] = 6\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$

Rozdíl v otáčivém účinku síly při působení v jednom a druhém směru je 6 N·m.

odpor prostředí

Kolikrát se zmenší odpor vzduchu brzdící cyklistu, který při jízdě stálou rychlostí zmenší svůj tvarový součinitel C_x z hodnoty 1 na 0,8 a svůj čelní průřez S z 0,45 m² na 0,35 m²?

$C_{x1} = 1$

$C_{x2} = 0,8$

$S_1 = 0,45\ \mathrm{m}^2$

$S_2 = 0,35\ \mathrm{m}^2$

$F_{d1} : F_{d2} = ?$

Velikost odporu prostředí:

$$F_d = \frac{1}{2} C_x \rho S v^2$$

$$F_{d1} = \frac{1}{2} C_{x1} \rho S_1 v^2$$

$$F_{d2} = \frac{1}{2} C_{x2} \rho S_2 v^2$$

$$\frac{F_{d1}}{F_{d2}} = \frac{\frac{1}{2} C_{x1} \rho S_1 v^2}{\frac{1}{2} C_{x1} \rho S_2 v^2} = \frac{C_{x1} S_1}{C_{x2} S_2} = \frac{1\left(0,45\,\mathrm{m}^2\right)}{0,8\left(0,35\,\mathrm{m}^2\right)} = 1,61$$

Odpor vzduch se sníží 1,61krát.

zákon zachování hybnosti

Krasobruslařský pár začíná sestavu tím, že se od sebe krasobruslaři odtlačí a každý se tak rozjede na opačnou stranu. Krasobruslař, který má hmotnost 80 kg, se začne pohybovat rychlostí 2 m.s^{-1}. Jakou rychlostí se od něho vzdaluje jeho partnerka vážící 50 kg?

m_1 = 80 kg

m_1 = 50 kg

v_0 = 0 m.s^{-1}

v = 2 m.s^{-1}

u = ?

Podle zákona zachování hybnosti platí, že se zachovává hybnost v izolované soustavě, kterou v našem případě tvoří krasobruslařský pár:

$$p_1 = p_2$$

$$m_1 v_0 + m_2 v_0 = m_1 v + m_2 w$$

$$0 = m_1 v + m_2 w$$

$$w = -\frac{m_1 v}{m_2} = -\frac{(80\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})}{(50\,\mathrm{kg})} = -3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Výsledná rychlost, kterou se krasobruslařka vzdaluje od svého partnera, je součtem obou rychlostí:

$$u = v + w = (2) + (3{,}2\,m\cdot s^{-1}) = (2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}) + (3{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}) = 5{,}2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Krasobruslaři se od sebe vzdalují rychlostí o velikosti 5,2 m.s^{-1}.

mechanická energie

Atlet odhodí oštěp o hmotnosti 800 g rychlostí 30 m.s^{-1}. Když jej vypouští z ruky, je těžiště oštěpu ve výšce 1,7 m. Jak velkou mechanickou energii má oštěp těsně po odhodu?

m = 800 g
v_0 = 30 m.s^{-1}
h = 1,7 m
E = ?

Převedeme:
m = 800 g = 0,8 kg

Celková mechanická energie je součtem kinetické a potenciální energie:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}(0{,}8\,\mathrm{kg})(30\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 + (0{,}8\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})(1{,}7\,\mathrm{m}) = 373{,}34\,\mathrm{J}$$

Celková mechanická energie oštěpu je 373,34 J.

mechanická energie

Gymnasti mohou na trampolíně vyskočit až do výšky 6 m. Jakou rychlostí doskakují na trampolínu? V jaké výšce je potenciální energie gymnasty stejně velká jako jeho kinetická energie? Potenciální energii považujte za nulovou v úrovni plachty trampolíny. Přeměny mechanické energie na vnitřní zanedbejte.

h = 6 m
v = ?
l = ?

V nejvyšším bodě má gymnasta největší potenciální energii a nulovou kinetickou. Potenciální energie se při klesání gymnasty přeměňuje na energii kinetickou. V nejnižším bodě je všechna potenciální energie přeměněna na kinetickou. Z tohoto zákona zachování mechanické energie vypočteme rychlost gymnasty těsně před doskokem:

$$E_p = E_k$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})(6\,\mathrm{m})} = 10{,}85\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Potenciální a kinetická energie si jsou rovny tehdy, když každá z nich má velikost $\frac{1}{2}$ celkové energie. Výšku, ve které rovnost nastává, vypočteme z potenciální energie:

$$\frac{E}{2} = mgl$$

$$\frac{mgh}{2} = mgl$$

$$l = \frac{h}{2} = \frac{(6\,\mathrm{m})}{2} = 3\,\mathrm{m}$$

Tělo gymnasty má poloviční hodnotu maximální možné potenciální energie ve výšce 3 m. Tady je i kinetická energie rovna polovině celkové mechanické energie.

zákon zachování energie

Podle pravidel olympijského turnaje může mít tenisový míček maximální hmotnost 58,5 g. Je-li puštěný z výšky 254 cm na betonovou plochu, musí odskočit 134,62 cm až 147,32 cm vysoko. Jaká je kinetická energie míčku těsně před dopadem? Kolik mechanické energie míčku se při odrazu přemění na vnitřní energii, odrazí-li se do výšky 147,32 cm? Kolik je to procent z jeho mechanické energie? Ztráty energie vzniklé odporem vzduchu zanedbejte.

m = 58,5 g
h_1 = 254 cm
h_2 = 147,32 cm
E_k = ?
U = ?
U = ? %E_k

Převedeme:
m = 58,5 g = 0,0585 kg
h_1 = 254 cm = 2,54 m
h_2 = 147,32 cm = 1,4732 m

Podle zákonu zachování mechanické energie se potenciální energie míčku ve výšce 2,54 m přemění na kinetickou energii míčku těsně před dopadem:

$$E_k = E_p = mgh = (0{,}0585\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(2{,}54\,\mathrm{m}) = 1{,}46\,\mathrm{J}$$

Podle zákona zachování celkové energie se kinetická energie částečně přemění na vnitřní energii míčku a částečně na jeho mechanickou energii, nejdříve kinetickou, která se postupně přeměňuje na potenciální energii odraženého míčku:

$$E_k = U + E_p$$

$$U = E_k - E_p = E_k - mgh_2$$

$$U = (1{,}46\,\mathrm{J}) - (1{,}0585\,\mathrm{kg})(9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}})(1{,}4732\,\mathrm{m}) = 0{,}61\,\mathrm{J}$$

100% = 1,46 J
x% = 0,61 J

$$x = \frac{(0{,}61\,\mathrm{J})100}{(1{,}46\,\mathrm{J})} = 41{,}78\%$$

Těsně před dopadem má míček kinetickou energii 1,46 J. Odrazem se přemění na vnitřní energii 0,61 J, tedy 41,78% z jeho původní mechanické energie.

mechanická práce

Jakou mechanickou práci vykoná cyklista, vyjede-li stálou rychlostí 100 m do kopce. Svah má sklon 5°, hmotnost cyklisty s kolem je 90 kg. Počítejme s tím, že kromě odporu stoupání jsou všechny ostatní odpory vyrovnány působením větru, který cyklistovi fouká do zad.

s = 100 m
α = 5°
m = 90 kg
W = ?

Práce, kterou cyklista vykoná je rovna součinu jeho svalové síly a dráhy, po které tato síla působí:

$$W = F_{sv} d \cos \alpha$$

Protože úhel mezi směrem působící síly a dráhou, po které působí, je 0°, cos α = 1.
Aby rychlost cyklisty byla stálá, musí být v ose jízdy výslednice sil nulová. Z obrázku vyplývá, že tedy svalová síla musí být stejně velká jako brzdivá složka tíhové síly:

$$F_{sv} = F_{od} = mg \sin \alpha$$

Dosadíme:

$$W = mg(\sin \alpha)d$$

$$W = (90\,\mathrm{kg})\left(9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}\right)(\sin 5°)(100\,\mathrm{m})$$

$$W = 7694{,}98\,\mathrm{J} = 7{,}7\,\mathrm{kJ}$$

Cyklista vykoná práci 7,7 kJ.

mechanická práce

Kolikrát byste museli zvednout na bench pressu činku o hmotnosti 25 kg, zvednete-li ji do výšky 40 cm, abyste vykonali stejně velkou mechanickou práci jako vzpěrač, který jednou zvedne nad hlavu do výšky 2 m činku vážící 250 kg?

m_1 = 25 kg
h_1 = 40 cm
m_2 = 250 kg
h_2 = 2 m
N=?

Převedeme:
h_1 = 40 cm = 0,4 m

Vzpěrač vykonáním práce dodal čince potenciální energii:

$$W_2 = E_p = m_2 g h_2$$

Při jednom zvednutí činky na bench pressu vykonáte práci:

$$W_1 = m_1 g h_1$$

Počet N potřebných zvednutí činky na bench pressu vypočítáme jako podíl:

$$N = \frac{W_2}{W_1} = \frac{m_2 g h_2}{m_1 g h_1} = \frac{m_2 h_2}{m_1 h_1} = \frac{(250\,\mathrm{kg})(2\,\mathrm{m})}{(25\,\mathrm{kg})(0{,}4\,\mathrm{m})} = 50$$

Abyste vykonali stejně velkou práci jako vzpěrač, museli byste činku zvednout 50krát.

mechanická práce

Rychlobruslař o hmotnosti 75 kg při závodech předjíždí soupeře. Zrychluje proto ze svých 10 m.s^{-1} na 12 m.s^{-1}. Jakou práci vykonají přitom jeho svaly? Tření a odpor vzduchu zanedbejte.

m = 80 kg
v_1 = 10 m.s^{-1}
v_2 = 12 m.s^{-1}
W = ?

Vykonaná mechanická práce svalů je rovna přírůstku kinetické energie rychlobruslaře:

$$W = E_{k2} - E_{k1}$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^{\ 2} - \frac{1}{2} m v_1^{\ 2} = \frac{1}{2} m \left(v_2^{\ 2} - v_1^{\ 2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} (80\,\mathrm{kg}) \left[\left(12\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \right)^2 - \left(10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} \right)^2 \right] = 1760\,\mathrm{J}$$

Svaly rychlobruslaře při zrychlení vykonají mechanickou práci 1760J.