ZÁKLADY STATISTIKY

Doc. RNDr. Jiří Zhánёl, Dr.

TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

(MATEMATICKÁ) STATISTIKA

DESKRIPTIVNÍ

(popisná)

ANALYTICKÁ

(inferentní, induktivní, srovnávací)

DESKRIPTIVNÍ STATISTIKA se zabývá zpracováním a popisem dat.

ANALYTICKÁ STATISTIKA umožňuje nám data analyzovat tzn. vyhodnotit.

Např. (1) stanovit, zda výsledky testů dvou tréninkových skupin vykazují významný rozdíl mezi středními hodnotami (vliv tréninkové metody), (2) vyhodnotit léčebný účinek u 2 souborů pacientů.

TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

ZÁKLADNÍ SOUBOR (generální soubor,Population Grundgesamtkeit) **je *soubor všech jedinců, u kterých bychom teoreticky měli šetření provádět.***

VÝBĚROVÝ SOUBOR ***je náhodnou podmnožinou prvků základního souboru, je získaný náhodným, resp. záměrným výběrem.***

ZÁVISLÉ SOUBORY

(test hod na koš, družstvo A 1., 2. pokusy)

NEZÁVISLÉ SOUBORY

(test hod na koš, družstvo A, družstvo B)

TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

Správný postup při hodnocení výsledků výzkumu:

1. nejprve zhodnotit **věcnou významnost** jak absolutně (v jednotkách měření), tak i relativně k podílu vlivu ostatních faktorů.

Pouze a jen, jde-li o randomizovaný výzkum, pak

2. použít výpočet **statistické významnosti,** jakožto kritérium pro posouzení rizika zobecnění.

VĚCNÁ A STATISTICKÁ VÝZNAMNOST

(1) STATISTICKÁ VÝZNAMNOST

Smysluplné použití posuzování výsledků výzkumu pomocí **statistické významnosti** je omezeno jen na soubory pořízené metodami **náhodného výběru,** resp. u randomizovaných experimentů (často nerespektováno).

Hlavní nevýhoda testování H_0 pomocí statistické významnosti je její závislost na rozsahu souboru (n):

- u **velkých výběrů** jsou i nepatrný rozdíl nebo korelace statisticky významné,
- u **malých výběrů** jsou i velký rozdíl či vysoká korelace statisticky nevýznamné.

Tab. XVIII.5. Kritické hodnoty $r(\alpha)$ korelačního koeficientu r; $P\{|r| \geqq r(\alpha)\} = \alpha$

Rozsah výběru n	α	
	0,05	0,01
3	0,996 9	0,999 9
4	0,950 0	0,990 0
5	0,878 3	0,958 7
6	0,811 4	0,917 2
7	0,754 5	0,874 5
8	0,706 7	0,834 3
9	0,666 4	0,797 7
10	0,631 9	0,764 6
11	0,602 1	0,734 8
12	0,576 0	0,707 9
13	0,552 9	0,683 5
14	0,532 4	0,661 4
15	0,514 0	0,641 1
16	0,497 3	0,622 6
17	0,482 2	0,605 5
18	0,468 3	0,589 7
19	0,455 5	0,575 1
20	0,443 8	0,561 4
21	0,432 9	0,548 7
22	0,422 7	0,536 8
23	0,413 2	0,525 6
24	0,404 4	0,515 1
25	0,396 1	0,505 2

VĚCNÁ A STATISTICKÁ VÝZNAMNOST

(2) VĚCNÁ VÝZNAMNOST

U nenáhodných výběrů se doporučuje posuzovat významnost **rozdílů** či **vztahů** pomocí tzv. **věcné významnosti** („size of effect“, neboli „velikost efektu“, např. pomocí **Cohenova d**).

Hlavní výhoda = nezávislost hodnocení věcné významnosti na rozsahu souboru (n).

http://www.socscistatistics.com/effectsize/Default3.aspx

POSUZOVÁNÍ VĚCNÁ VÝZNAMNOST

(1) Cohen (1992). Indexy velikosti efektu (hodnoty pro malé, střední a velké efekty).

Test	Effect size		
	small	medium	large
d	.20	.50	.80
r	.10	.30	.50
Chi^2	.10	.30	.50

POSUZOVÁNÍ VĚCNÁ VÝZNAMNOST

(2) Soukup (2013). Effect size po úpravě do intervalů

Test	small	medium	large
d	0,2-0, 49	0,5-0,79	větší než 0,8
r	0,1-0,29	0,3-0,49	větší než 0,5
Chi2	0,1-0,29	0,3-0,49	větší než 0,5

Formulace: nulová (H_0) resp. **alternativní H_1, H_A**

Příklad 1

H_{01}: *intersexuální rozdíly* *somatických a motorických předpokladů mezi tenisty (n=221) a tenistkami (n=193) ve věkové kategorii* ***11 -12 let jsou nevýznamné*.**

Soubor/SCH	Tenisté		Tenistky		Cohen´s d, hodnocení efektu
	M	SD	M	SD	
Výška (cm)	155,10	7,62	154,60	6,94	0,07 (žádný)
Hmotnost (kg)	43,50	6,68	43,49	7,17	0,00 (žádný)
MS (kp)	25,14	4,60	23,08	4,61	0,45 (malý)
RS	0,58	0,09	0,53	0,09	0,56 (střední)

Formulace: nulová (H_0) resp. **alternativní H_1, H_A**

Příklad 2

H_{A1}: *intersexuální rozdíly* *somatických a motorických předpokladů mezi tenisty (n=157) a tenistkami (n=163) ve věkové kategorii **13 -14 let jsou významné**.*

Category	M (male)	SD	M (female)	SD	Cohen´s d
Height (cm)	169.79	9.27	164.93	5.80	0.63 (med)
Weight (kg)	57.05	9.26	53.57	6.31	0.44 (small)
MHSL (kp)	34.64	7.53	29.09	3.84	0.94 (large)
RHSL	0.61	0.10	0.55	0.06	0.73 (med)

VĚCNÁ VÝZNAMNOST – LITERATURA

Blahuš, P. (2000). Statistická významnost proti vědecké průkaznosti výsledků výzkumu. *Česká kinantropologie, 4*(2), 53-72.

Cohen, J. (1992). A Power Primer. *Psychological Bulletin, 1*(112), 155-159. doi:10.1037/0033-2909.112.1.155

Soukup (2013). Věcná významnost výsledků a její možnosti měření. *Data a výzkum - SDA Info 2013, 7*(2), 125-148. DOI: http://dx.doi.org/10.13060/23362391.2013.127.2.41

http://www.socscistatistics.com/effectsize/Default3.aspx

HYPOTÉZA je podmíněný výrok o vztahu mezi dvěma nebo více proměnnými (Kerlinger, 1972).

1. ***Pracovní hypotéza*** **- subjektivní domněnky o předmětu problému (formulovány všeobecně).**
2. ***Výzkumná (věcná) hypotéza*** **- předpoklad existenci vztahu mezi dvěma či více proměnnými.**
3. ***Statistická hypotéza*** **- hypotetické tvrzení vyjádřené ve statistických termínech o relacích, vyvozených ze vztahů ve věcné hypotéze.**

Zatímco stupeň obecnosti tvrzení klesá, stupeň přesnosti vzrůstá (pracovní H –> statistická H).

HYPOTÉZA NULOVÁ A ALTERNATIVNÍ

Základním typem úvahy při statistickém testování tzv. *nulová hypotéza* (H_O).

Podstatou *nulové hypotézy* je odůvodněný předpoklad, že mezi dvěma jevy <u>není statisticky významný rozdíl</u> (rozdíl je nulový).

Jako *nulová hypotéza* se označuje domněnka, že dva statistické soubory se shodují v určitých statistických parametrech (např. AP, r).

H_0: $\mu = \mu_0$ H_A: $\mu \neq \mu_0$; H_A: $\mu > \mu_0$; H_A: $\mu < \mu_0$

NULOVÁ A ALTERNATIVNÍ HYPOTÉZA

Jestliže předpokládáme, že mezi dvěma jevy existuje významný rozdíl, formulujeme tzv. *alternativní hypotézu H_A.*

K tomu, zda hypotézu (nulovou či alternativní) zamítáme, či nezamítáme používáme tzv. testovacích metod (viz dále).

Co je považováno za pravděpodobný (TV mužů a žen je rozdílná, H_1), resp. nepravděpodobný (TV M=Ž, H_0) výsledek, musí být stanoveno předem.

H_0: $\mu = \mu_0$ H_A: $\mu \neq \mu_0$; H_A: $\mu > \mu_0$; H_A: $\mu < \mu_0$

TESTOVÁNÍ STATISTICKÝCH HYPOTÉZ

STATISTICKÁ VÝZNAMNOST

Výsledky testování (statistická významnost) jsou posuzovány na tzv. hladině významnosti.

Úroveň hladiny významnosti α=0,05 znamená, že nulová hypotéza se zamítá, když je pravděpodobnost, že nastane nulová hypotéza, menší než 5% (α = 0,01).

V tomto případě se přikláníme k platnosti *alternativní hypotézy*.

Nejčastěji srovnáváme střední hodnoty dvou výběrových souborů (rozsahu n_1, n_2), resp. závislosti.

1. NOMINÁLNÍ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

1. Lyžaři

2. Lyžaři

Znak - kouření

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory (znaky nabývají právě dvou hodnot)	Zkouška významnosti rozdílů souborů	X^2-čtyřpolní test (Fischerův test, čtyřpolní tabulka)
Dva nezávislé soubory (znaky nabývají více hodnot)	Zkouška významnosti rozdílů souborů	X^2-vícepolní test (kontingenční tabulka)
Dva závislé soubory (znaky nabývají právě dvou hodnot)	Zkouška významnosti změn	X^2-Mc Nemarův test
Dva závislé soubory	Hodnocení závislosti	Koef. kontingence C

2. ORDINÁLNÍ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

1. Gymnasté A

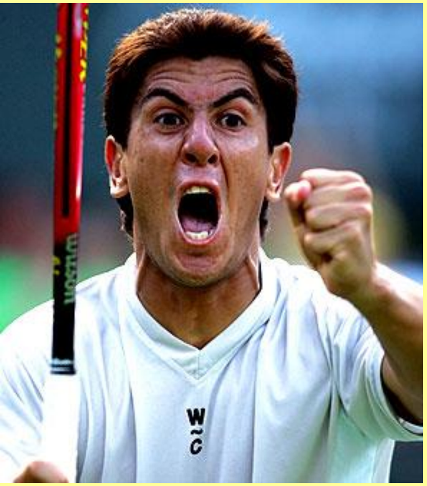
2. Gymnasté B

Znak - body

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory	Test rovnosti centrálních tendencí	Medianový test (jednoduchý), U-test Mann-Whitneyho, Kolmogorov-Smirnovův test, Marshallův test
Dva závislé soubory	Test rovnosti centrálních tendencí	Znaménkový test, Wilcoxonův test
Více nezávislých souborů	Test rovnosti centrálních tendencí	Medianový test (rozšířený), H-test Kruskal-Wallisův (analýza rozptylu)
Dva závislé soubory	Hodnocení míry závislosti	Spearmanův resp. Kendallův koeficient korelace
Více závislých souborů	Hodnocení míry závislosti	Friedmanova analýza rozptylu

3. METRICKÁ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY I

Tenisté



Tenistky

Znak: TV

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva nezávislé soubory	Zkouška rovnosti rozptylů (homogenita)	F-test
Dva nezávislé soubory	Zkouška rovnosti středních hodnot	t-test
Dva nezávislé soubory	Zkouška nezávislosti korelací	Korelační test
Dva závislé soubory	Zkouška rovnosti rozptylů (homogenita)	F-test

3. METRICKÁ DATA - STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY II

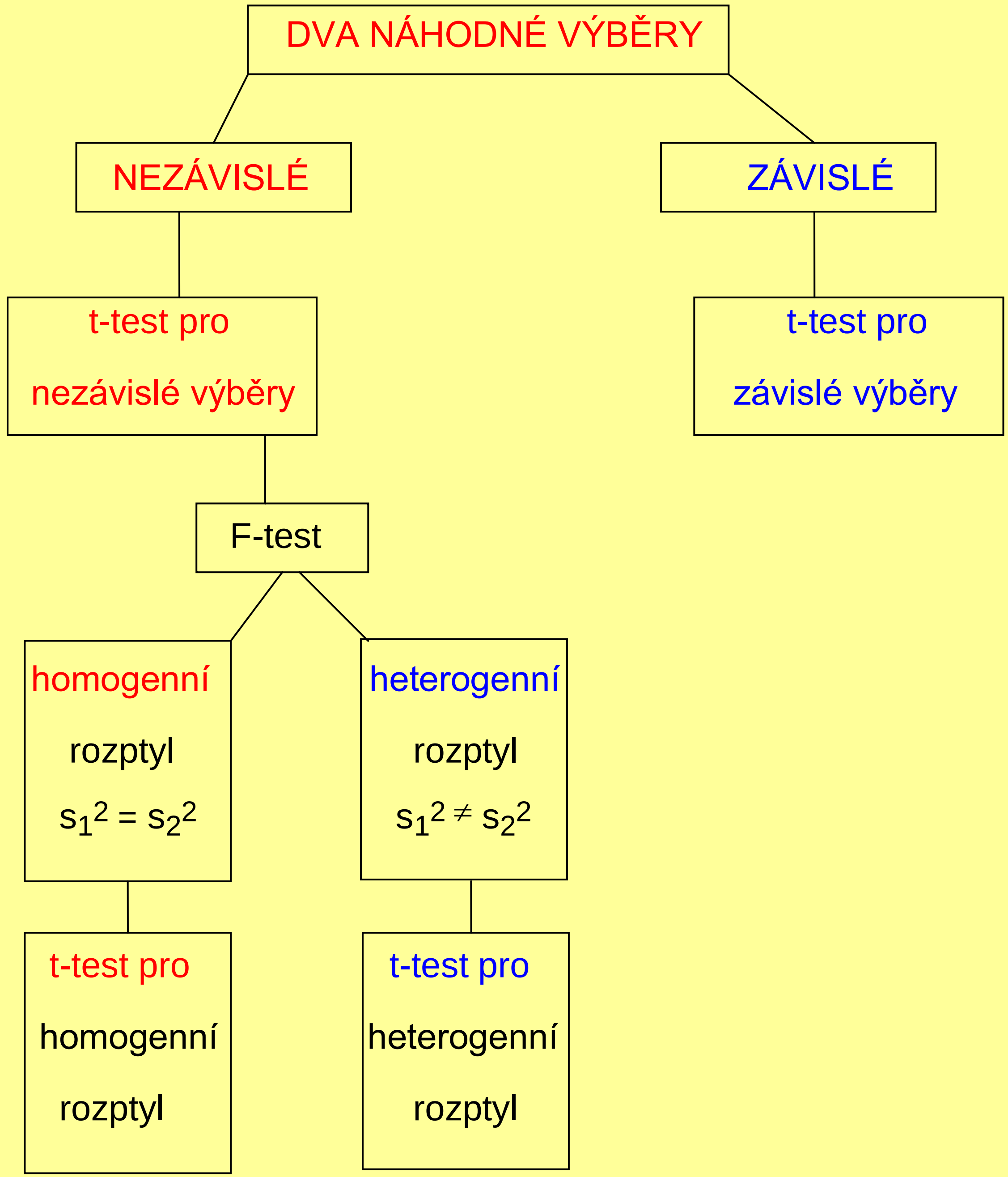
Tenisté

PŘEDPOKLAD	PROBLÉM	TESTOVACÍ METODA
Dva závislé soubory	Zkouška rovnosti středních hodnot	Diferenční t-test (párový)
Dva závislé soubory	Hodnocení závislosti	Koef. součinové korelace a regrese
Více nezávislých souborů	Zkouška rovnosti průměrů	Analýza rozptylu, Duncanův test pořadí, Bartlettův test
Více nezávislých souborů	Zkouška rovnosti korelačních koeficientů	Test homogenity

Tenistky

Znak: TV

ROZHODOVACÍ DIAGRAM PRO UŽITÍ t-TESTU



STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

- dva závislé soubory
- zkouška rovnosti středních hodnot

PŘÍKLAD – Zjistěte, zda se na automobilu určité značky sjíždějí obě přední pneumatiky stejně rychle

číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6
leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4
rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2

$H_0 : \mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$ $\qquad$ $H_A : \mu = \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

$$T = \frac{\left|\overline{X} - \mu\right|}{s}\sqrt{n} \qquad T < t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow$$

hypotézu nelze zamítnou

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

číslo automobilu	1	2	3	4	5	6
pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6
leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4
rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{n} X_i = \frac{1}{6}(0{,}3 - 0{,}1 + 0{,}2 - 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2) = \frac{0{,}5}{6} = \underline{\underline{0{,}0833}}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{0{,}2167^2 + (-0{,}1833)^2 + 0{,}1167^2 + (-0{,}2833)^2 + 0{,}0167^2 + 0{,}1167^2}{5} =$$

$$= \frac{0{,}18833}{5} = 0{,}0377$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0{,}0377} = \underline{\underline{0{,}1941}}$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

$$t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6-1;1-\frac{0,05}{2}} = t_{5;0,975} = 2,571$$

= > z tabulek

$$T = \frac{\left|\overline{X} - \mu\right|}{s}\sqrt{n} = \frac{0,0833 - 0}{0,1941}\sqrt{6} = 1,0518 < 2,571$$

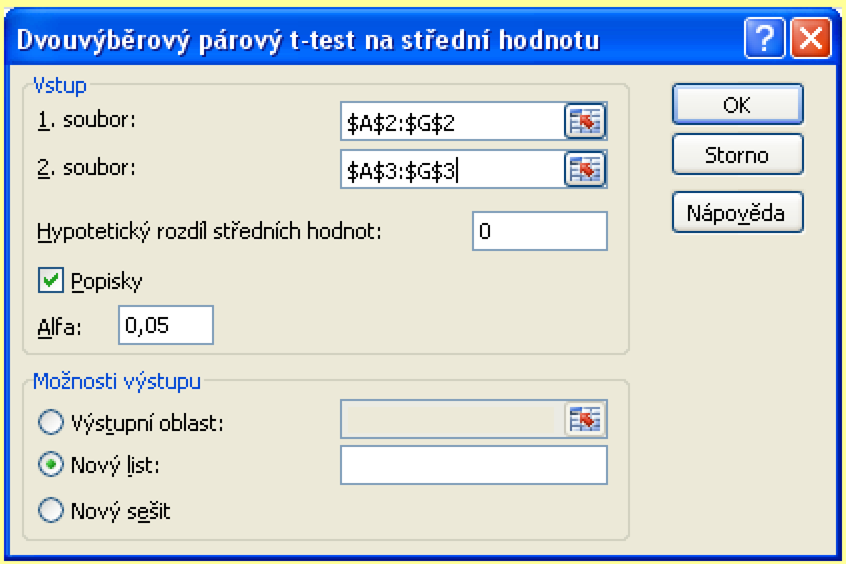
Protože 1,0518 < 2,571, nelze na základě získaných dat zamítnout hypotézu, že se obě přední pneumatiky sjíždějí stejně rychle.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Párový t - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	číslo automobilu	1	2	3	4	5	6	
2	pravá pneumatika	1,8	1	2,2	0,9	1,5	1,6	
3	leva pneumatika	1,5	1,1	2	1,1	1,4	1,4	
4	rozdíl	0,3	-0,1	0,2	-0,2	0,1	0,2	
5								



Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu

	pravá pneumatika	leva pneumatika
Stř. hodnota	1,5	1,416666667
Rozptyl	0,24	0,109666667
Pozorování	6	6
Pears. korelace	0,961571662	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	5	
t Stat	1,051757905	
P(T<=t) (1)	0,17053101	
t krit (1)	2,015048372	
P(T<=t) (2)	0,34106202	
t krit (2)	2,570581835	

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

- dva nezávislé soubory
- test rovnosti středních hodnot

PŘÍKLAD – U studentů rozdělených do dvou skupin byl zaznamenán počet leh-sedů za 1 minutu. Jsou obě skupiny stejně výkonné?

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_A: \mu_1 \neq \mu_2$

$|T| < t_{n+m-2;1-\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow$ hypotézu nelze zamítnou

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

n1=6 n2=5 AP$_X$=57 AP$_Y$=51,6 s$_X^2$ =12,8 s$_Y^2$ =7,3

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}}\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}=$$

$$=\frac{57-51{,}6}{\sqrt{(6-1)12{,}8+(5-1)7{,}3}}\sqrt{\frac{6.5.(6+5-2)}{6+5}}=$$

$$=\frac{5{,}4}{\sqrt{62{,}5+29{,}2}}\sqrt{24{,}55}=2{,}79$$

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t -test

$$t_{m+m-2;1-\frac{\alpha}{2}} = t_{6+5-2;1-\frac{0,05}{2}} = t_{9;0,975} = 2,262$$ **= > z tabulek**

$$|T| = 2,79 \geq 2,262$$

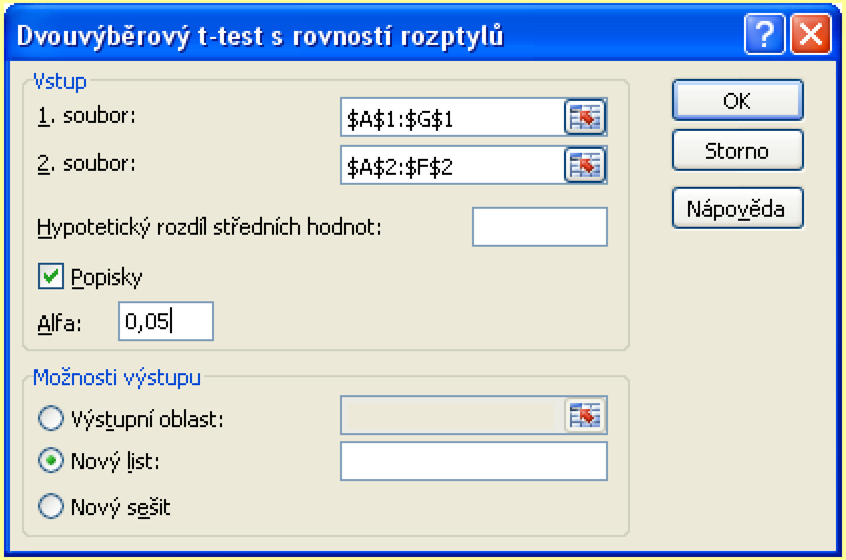
Protože 2,79 ≥ 2,262 zamítáme hypotézu, že se obě skupiny studentů jsou stejně výkonné.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

Dvouvýběrový t - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1. skupina	62	54	55	60	53	58	
2	2. skupina	52	56	49	50	51		



Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů

	1. skupina	2. skupina
Stř. hodnota	57	51,6
Rozptyl	12,8	7,3
Pozorování	6	5
Společný rozptyl	10,35555556	
Hyp. rozdíl stř. hodnot	0	
Rozdíl	9	
t Stat	2,77122216	
P(T<=t) (1)	0,010855041	
t krit (1)	1,833112923	
P(T<=t) (2)	0,021710083	
t krit (2)	2,262157158	

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

- dva nezávislé soubory
- zkouška rovnosti rozptylů

PŘÍKLAD – Na základě dat uvedených v předchozím příkladě rozhodněte, zda oba základní soubory mají stejné rozptyly.

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

$$Z = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \qquad volím \quad tak, aby \quad Z > 1$$

$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

$H_A: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

$$Z < F_{n-1, m-1; 1-\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow$$ hypotézu nelze zamítnou

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

1. skupina	62	54	55	60	53	58
2. skupina	52	56	49	50	51	

n=6 m=5 s_X^2 =12,8 s_Y^2 =7,3

$$Z = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = \frac{12,8}{7,3} = 1,753$$

$$F_{n-1,m-1;1-\frac{\alpha}{2}} = F_{6-1,5-1;1-\frac{0,05}{2}} = F_{5,4;0,975} = 9,36$$ **= > z tabulek**

$$Z = 1,753 < 9,36$$

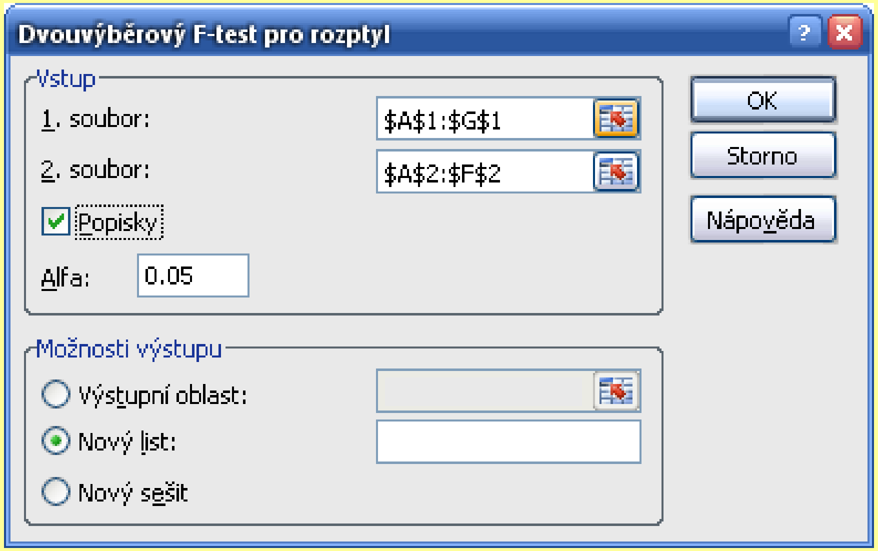
Protože 1,753 < 9,36 nelze zamítnout hypotézu o shodnosti rozptylů.

STATISTICKÉ TESTOVACÍ METODY

F - test

Pomocí Excelu – Analýza dat – Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1. skupina	62	54	55	60	53	58	
2	2. skupina	52	56	49	50	51		



Dvouvýběrový F-test pro rozptyl

	1. skupina	2. skupina
Stř. hodnota	57	51.6
Rozptyl	12.8	7.3
Pozorování	6	5
Rozdíl	5	4
F	1.753424658	
P(F<=f) (1)	0.303172533	
F krit (1)	6.256056502	

**Děkuji
za pozornost**