

# Lineární algebra pro IT

Mgr. Vít Vondrák, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI

vit.vondrak@vsb.cz, místnost k213

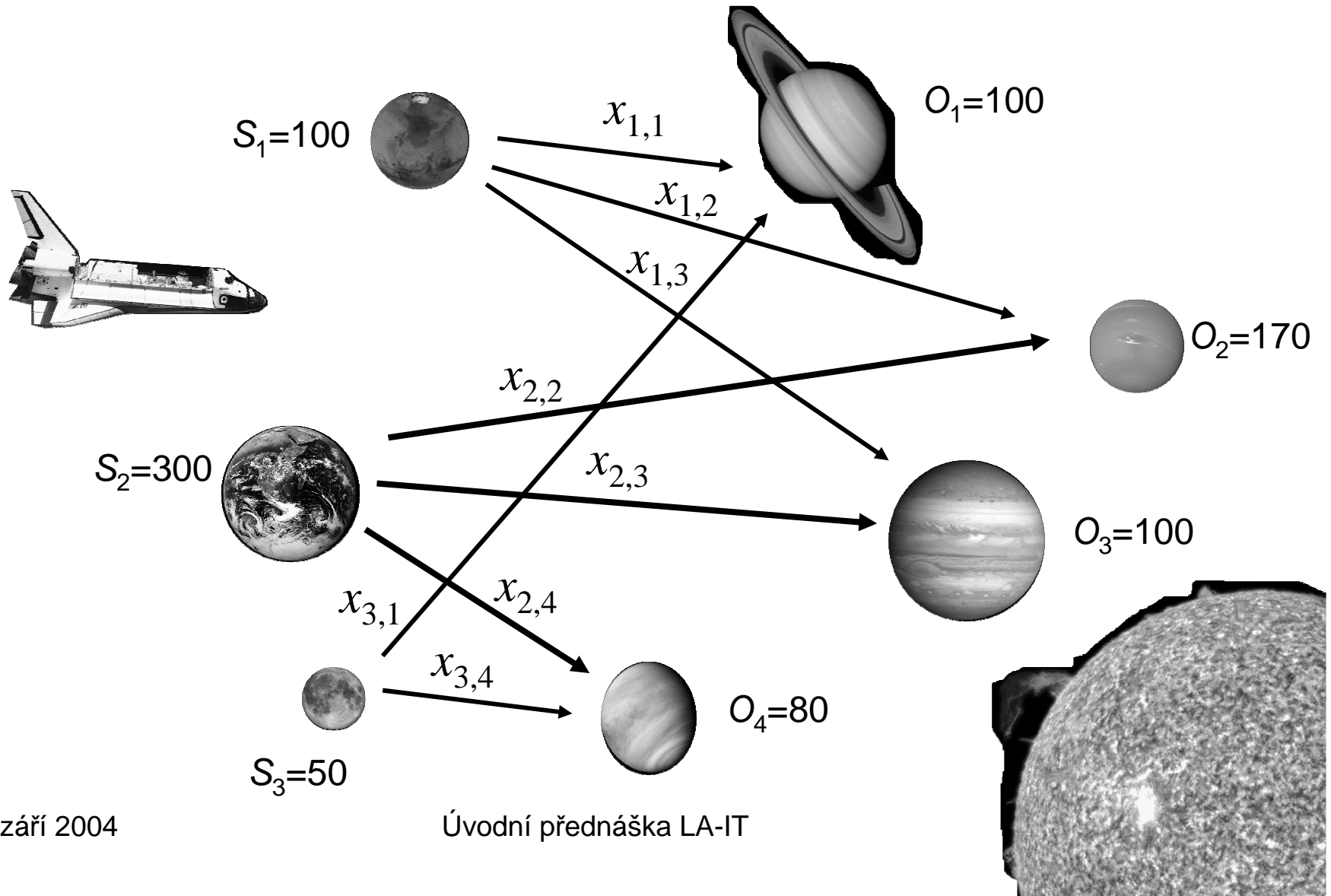
<http://katis.cs.vsb.cz/ostatni/pre-b.php?predmet=457-525>

<http://vondrak.am.vsb.cz/la-it>

# Obsah předmětu

- Operace s vektory a maticemi
  - vlastnosti těchto operací
- Řešení soustav lineárních rovnic
- Teorie vektorových prostorů
  - řešitelnost soustav lineárních rovnic
- Lineární zobrazení a transformace
  - zobecnění soustav lineárních rovnic
- Multilineární zobrazení, determinanty
- Úvod do spektrální analýzy
- Úvod do analytické geometrie

# Aplikace I: dopravní problém



27. září 2004

Úvodní přednáška LA-IT

# Aplikace I: dopravní problém

Soustava lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcccccccc} x_{1,1} & + & x_{1,2} & + & x_{1,3} & & & & = & 100 \\ & & & & & x_{2,2} & + & x_{2,3} & + & x_{2,4} & = & 300 \\ & & & & & & & & & & x_{3,1} & + & x_{3,4} & = & 50 \\ x_{1,1} & & & & & & & & & & + & x_{3,1} & = & 100 \\ & x_{1,2} & & & & + & x_{2,2} & & & & & & = & 170 \\ & & x_{1,3} & & & + & x_{2,3} & & & & & & = & 100 \\ & & & & & & & x_{2,4} & & & + & x_{3,4} & = & 80 \end{array}$$

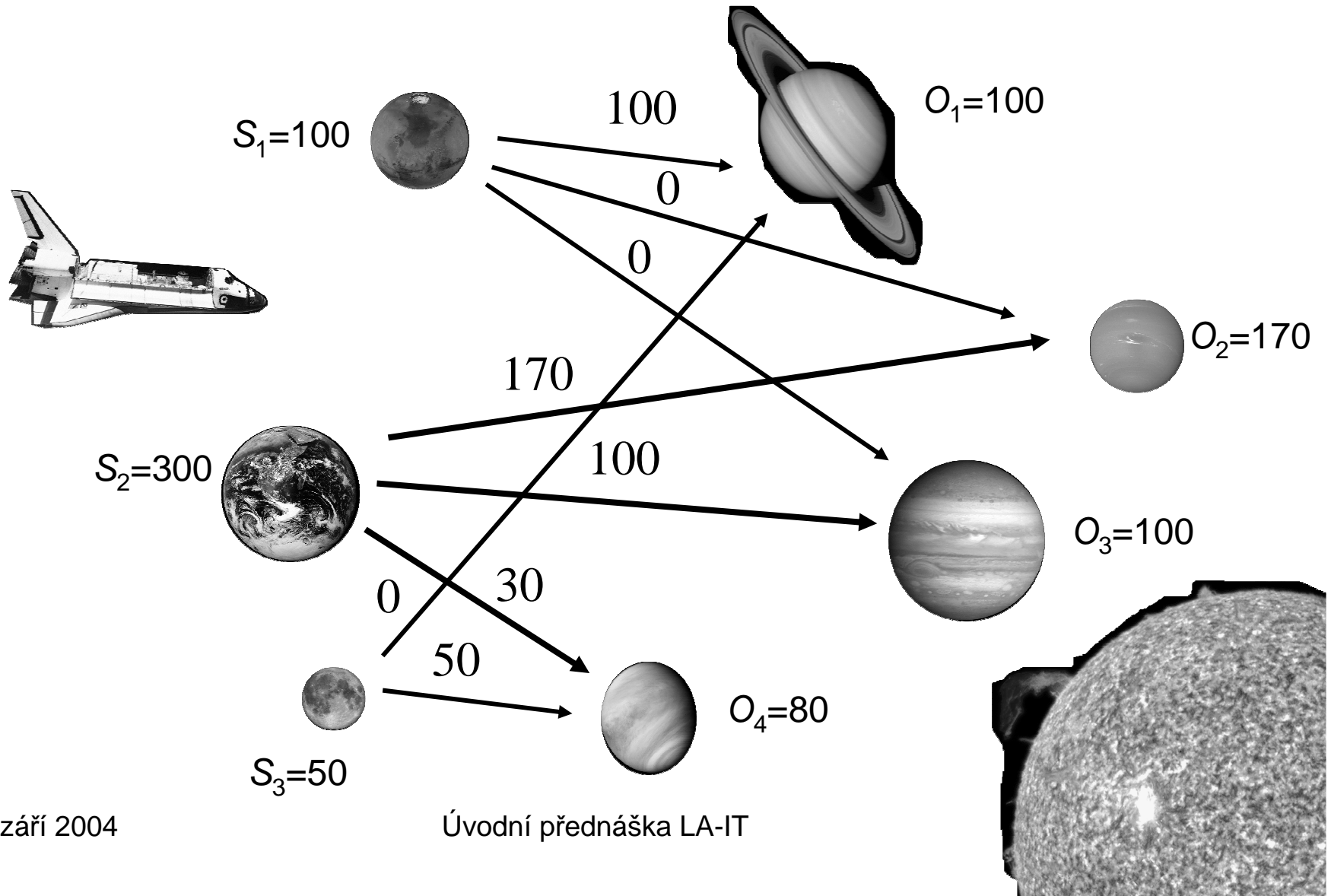


$$\begin{aligned} x_{1,1} &= 50 + q, & x_{1,2} &= -50 + p - q, & x_{1,3} &= 100 - p \\ x_{2,2} &= 220 - p + q, & x_{2,3} &= p, & x_{2,4} &= 80 - q \\ x_{3,1} &= 50 - q, & x_{3,4} &= q \\ \text{pro lib. } p, q &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_{1,1} &= 100, & x_{1,2} &= 0, & x_{1,3} &= 0 \\ x_{2,2} &= 170, & x_{2,3} &= 100, & x_{2,4} &= 30 \\ x_{3,1} &= 0, & x_{3,4} &= 50 \end{aligned}$$

# Aplikace I: dopravní problém



# Aplikace I: dopravní problém

Maticový zápis soustavy:

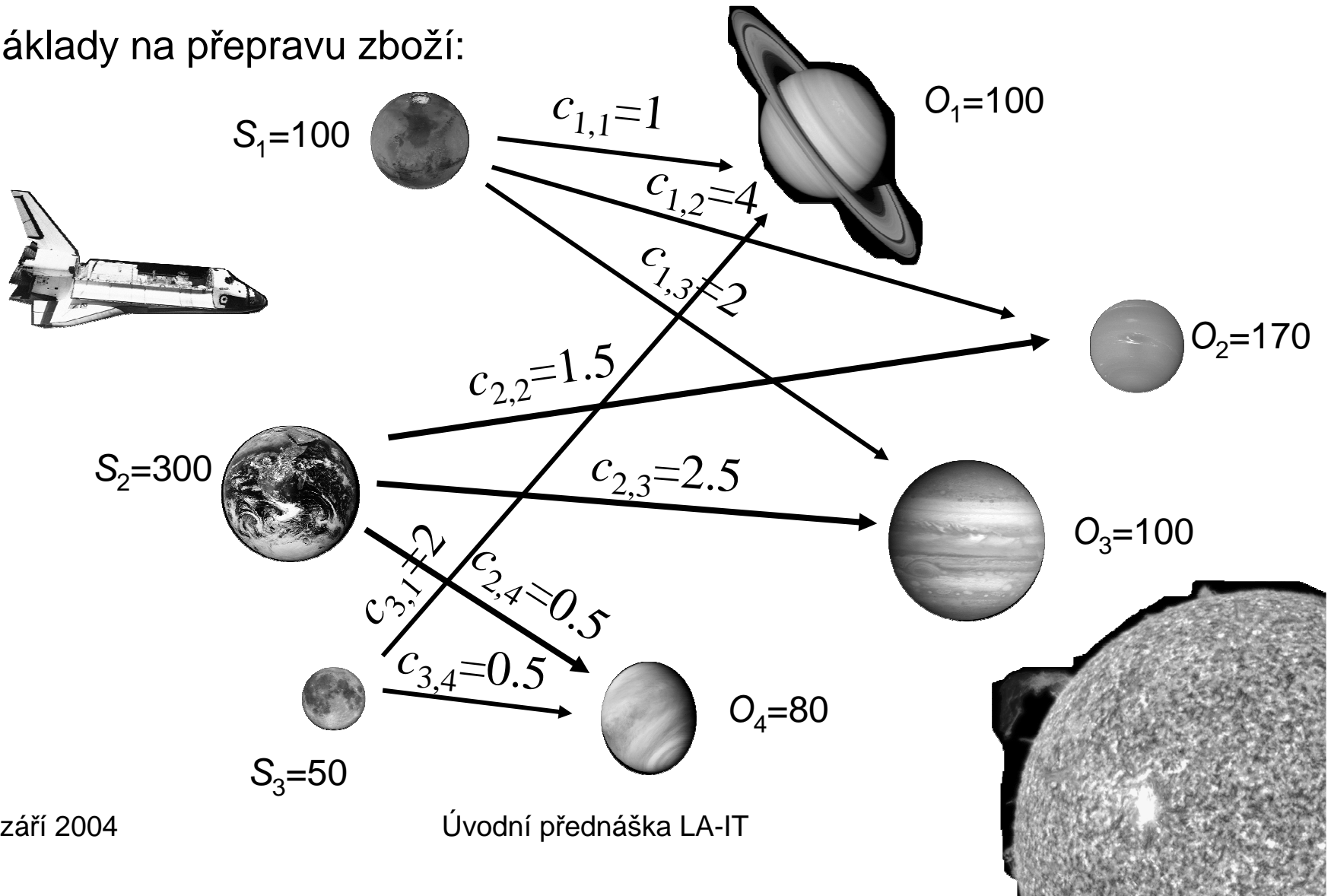
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \\ x_{3,1} \\ x_{3,4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 300 \\ 50 \\ 100 \\ 170 \\ 100 \\ 80 \end{bmatrix}$$

- Řešitelnost soustavy
  - soustava nemá řešení (zboží nelze rozvést)
  - soustava má jediné řešení (zboží lze rozvést jediným způsobem)
  - soustava má nekonečně mnoho řešení (zboží lze rozvést různým způsobem – možno dále specifikovat jakým)

# Aplikace I: dopravní problém

Náklady na přepravu zboží:



# Aplikace I: dopravní problém

Optimalizační úloha:

Nalézt  $x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,2}, x_{2,3}, x_{2,4}, x_{3,1}, x_{3,4} \geq 0$  tak, aby

$$1x_{1,1} + 4x_{1,2} + 2x_{1,3} + 1.5x_{2,2} + 2.5x_{2,3} + 0.5x_{2,4} + 2x_{3,1} + 0.5x_{3,4}$$

bylo co nejmenší, a zároveň

$$\begin{array}{rcl}
 x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} & & = 100 \\
 & x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} & = 300 \\
 & & x_{3,1} + x_{3,4} = 50 \\
 x_{1,1} & & + x_{3,1} = 100 \\
 & x_{1,2} + x_{2,2} & = 170 \\
 & & x_{1,3} + x_{2,3} = 100 \\
 & & & x_{2,4} + x_{3,4} = 80
 \end{array}$$

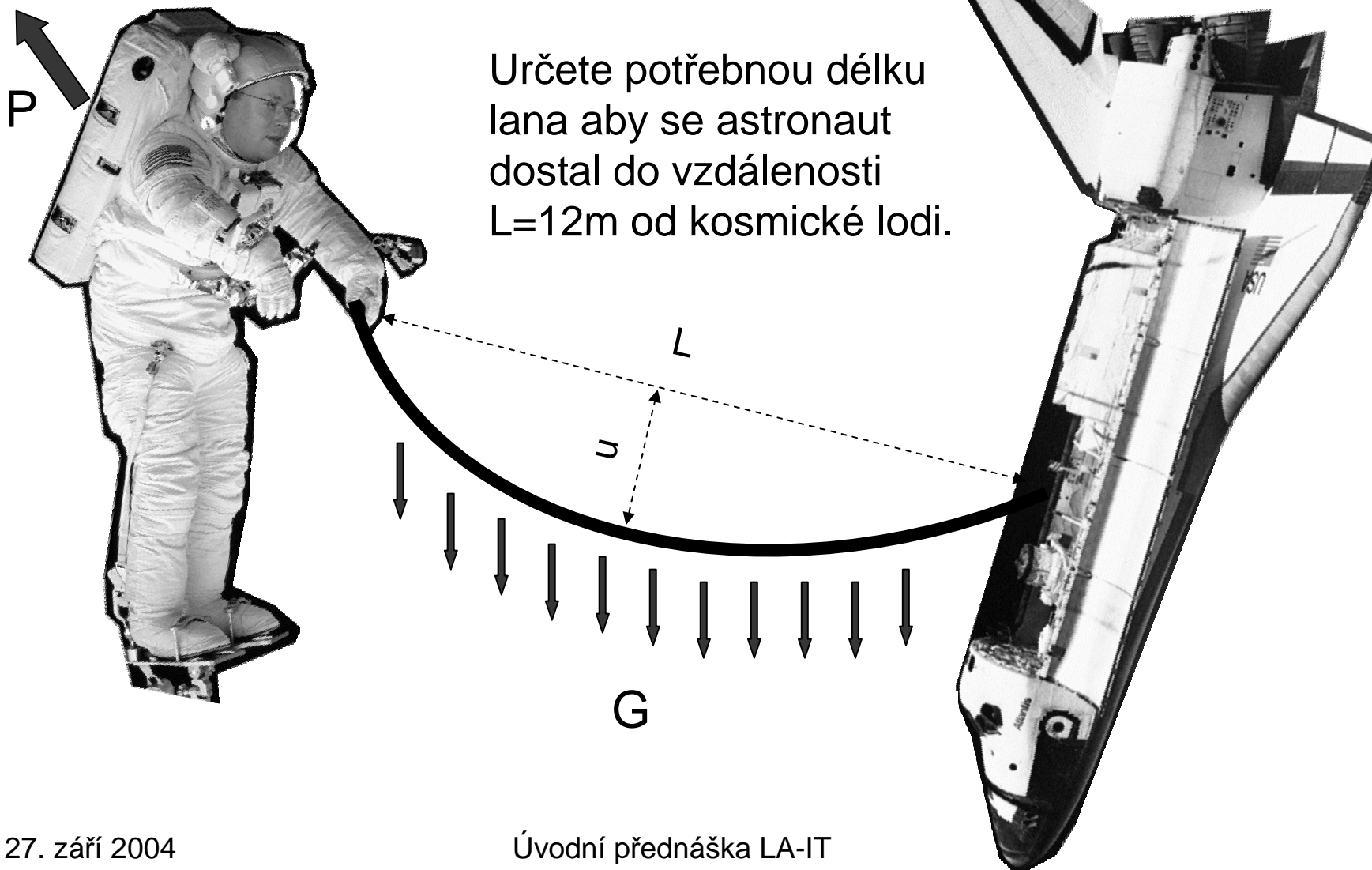
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_{1,1} \\ c_{1,2} \\ c_{1,3} \\ c_{2,2} \\ c_{2,3} \\ c_{2,4} \\ c_{3,1} \\ c_{3,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Maticový zápis:

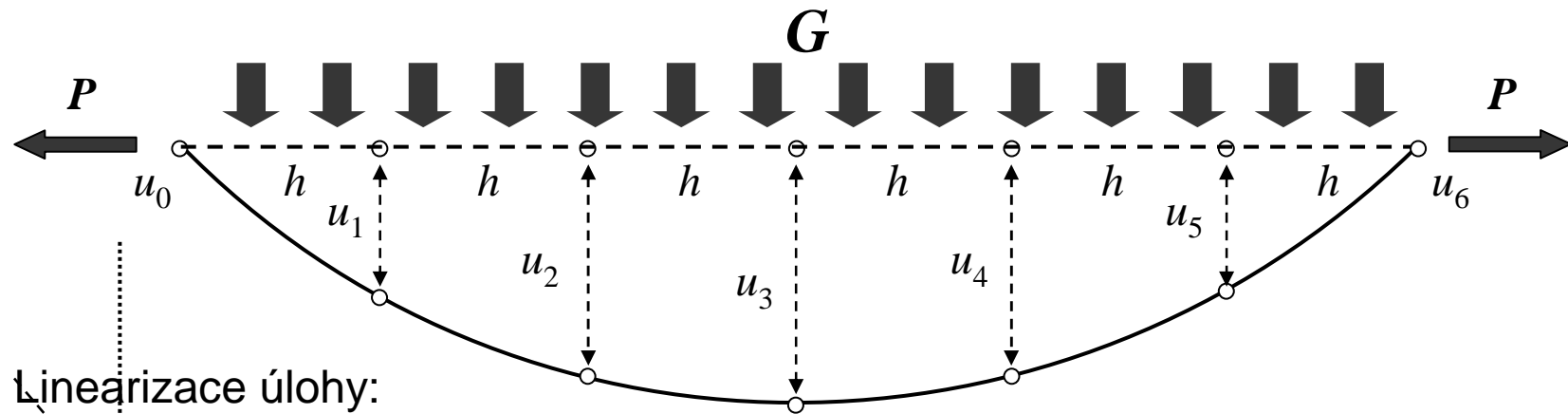
$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ a } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$



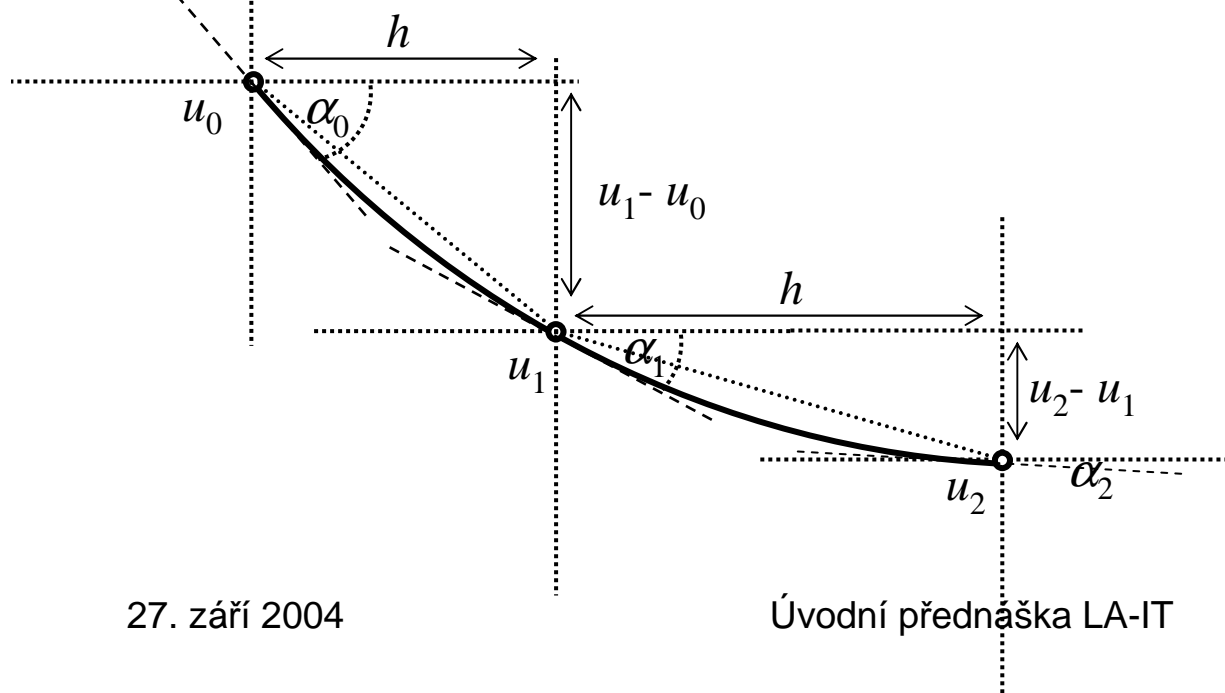
# Aplikace II: délka lana



# Aplikace II: délka lana



Linearizace úlohy:



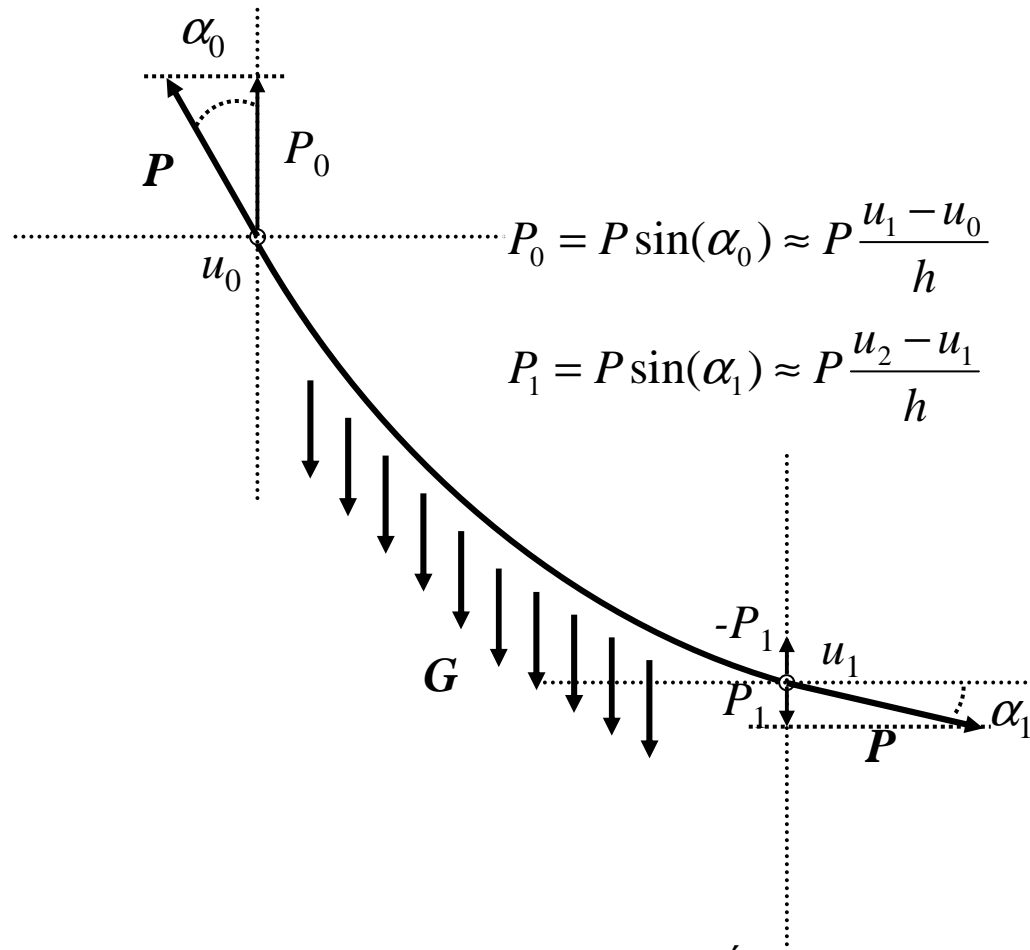
$$\operatorname{tg}(\alpha_0) \approx \frac{u_1 - u_0}{h}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) \approx \frac{u_2 - u_1}{h}$$

Malé deformace:

$$\operatorname{tg}(\alpha) \approx \sin(\alpha)$$

# Aplikace II: délka lana



$$P_0 = P \sin(\alpha_0) \approx P \frac{u_1 - u_0}{h}$$

$$P_1 = P \sin(\alpha_1) \approx P \frac{u_2 - u_1}{h}$$

$$P_0 + (-P_1) = hG$$

$$P \frac{u_1 - u_0}{h} - P \frac{u_2 - u_1}{h} = hG$$

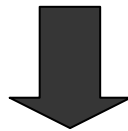
$$-u_0 + 2u_1 - u_2 = \frac{h^2 G}{P}$$

# Aplikace II: délka lana

Soustava lineárních rovnic:

$$\begin{array}{rcccccc}
 -u_0 & +2u_1 & -u_2 & & & & = h^2 F \\
 & -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = h^2 F \\
 & & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = h^2 F \\
 & & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = h^2 F \\
 & & & & -u_4 & +2u_5 & -u_6 & = h^2 F
 \end{array}$$

$F = \frac{G}{P} = \frac{m_l g_z}{m_v g_m}$   
 $F = \frac{1\text{kg} \cdot 9.81\text{ms}^{-2}}{90\text{kg} \cdot 1.625\text{ms}^{-2}} = 0.0671$   
 $L = 12\text{m} \Rightarrow h = \frac{L}{6} = 2\text{m}$   
 $u_0 = u_6 = 0$



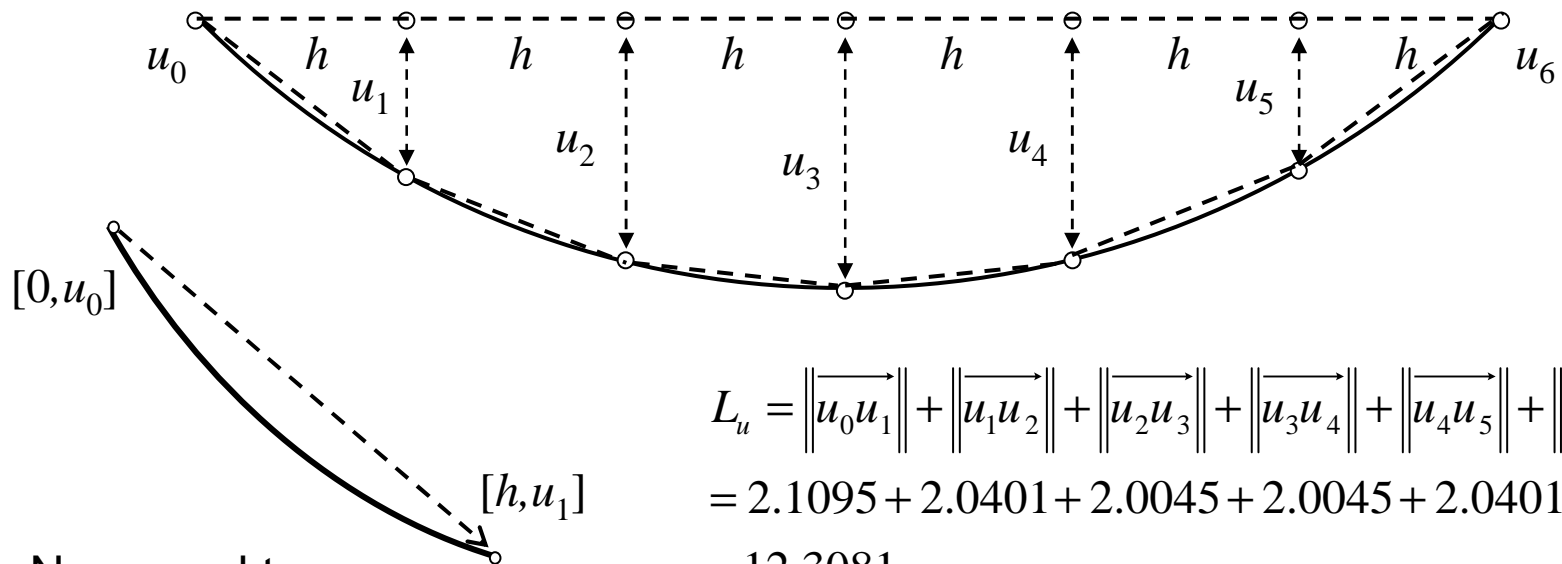
$$\begin{array}{rcccc}
 2u_1 & -u_2 & & & = 0.2683 \\
 -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & = 0.2683 \\
 & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & = 0.2683 \\
 & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = 0.2683 \\
 & & & -u_4 & +2u_5 & = 0.2683
 \end{array}$$

**Au=b**

$u_1 = 0.6708$   
 $u_2 = 1.0732$   
 $u_3 = 1.2074$   
 $u_4 = 1.0732$   
 $u_5 = 0.6708$

# Aplikace II: délka lana

Výpočet délky:



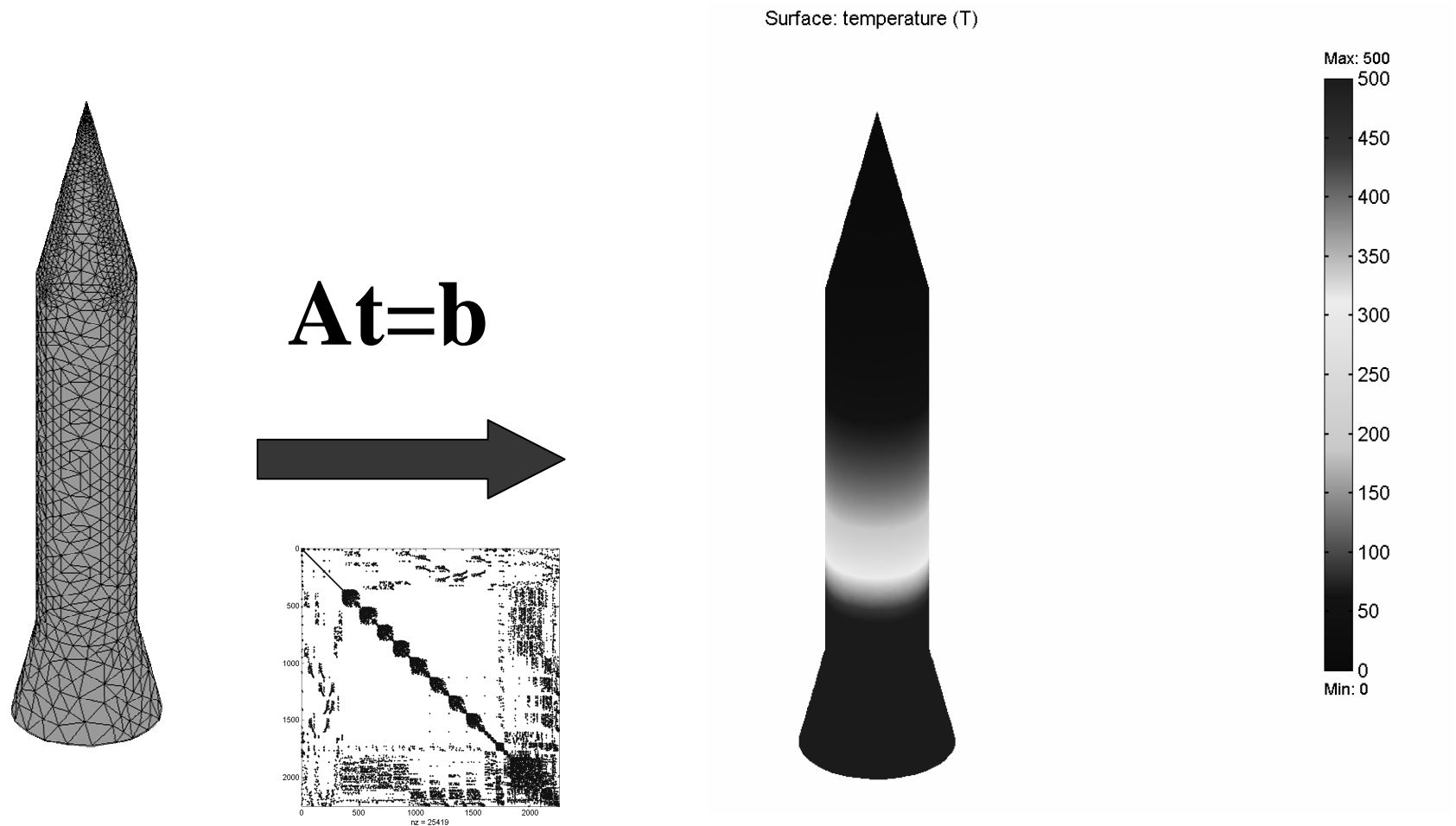
Norma vektoru:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{u_0u_1}\| &= \sqrt{(h-0)^2 + (u_1-u_0)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4.3^2} = 2.1095\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_u &= \|\overrightarrow{u_0u_1}\| + \|\overrightarrow{u_1u_2}\| + \|\overrightarrow{u_2u_3}\| + \|\overrightarrow{u_3u_4}\| + \|\overrightarrow{u_4u_5}\| + \|\overrightarrow{u_5u_6}\| \\ &= 2.1095 + 2.0401 + 2.0045 + 2.0045 + 2.0401 + 2.1095 \\ &= 12.3081\end{aligned}$$

K tomu aby se astronaut dostal do vzdálenosti 12m od lodi je zapotřebí lano o délce 12,31m.

# Aplikace III: složitější úloha



# Cíle předmětu

- Seznámení se se základy maticového počtu
- Zvládnutí principů řešení soustav lineárních rovnic (řešení, teoretické souvislosti)
- Porozumění pojmu vektorového prostoru (jeho vlastnosti a použití)
- Seznámení se s pojmy, základními vlastnostmi a užitím lineárních a multilineárních zobrazení a problematikou s nimi související
- Pochopení základních pojmů spektrální analýzy
- Zvládnutí základů analytické geometrie z pohledu teorie vektorových prostorů (metrické úlohy, kvadratické plochy)
- Aplikace

# Hodnocení

- Cvičení (30 bodů)
  - Písemný test 1 (8 bodů)
  - Písemný test 2 (7 bodů)
  - Domácí projekty (15 bodů)
  - Zápočtový projekt
  - Udělení zápočtu: min 15 bodů + projekt
- Písemná zkouška (70 bodů)
  - nevyhověl (0-50 bodů)
  - dobře (51-65 bodů)
  - velmi dobře (66-85 bodů)
  - výborně (86-100 bodů)



# Literatura

- Základní literatura
  - Z. Dostál, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 2000
  - M. Demlová, B. Pondělíček, Úvod do algebry, ČVUT Praha 1996
  - Sylaby přednášek na <http://vondrak.am.vsb.cz/la-it>
- Dolňková literatura
  - B. Budinský, J. Charvát, Matematika I, SNTL Praha 1987
  - V. Havel, J. Holenda, Lineární algebra, SNTL/Alfa Praha 1984
  - J. Schmidtmayer, Maticový počet a jeho použití v technice, SNTL Praha 1967
  - J. Vrbický, D. Šalounová, M. Sedláček, Lineární algebra, VŠB-TU Ostrava 1994
  - Sylaby cvičení na <http://vondrak.am.vsb.cz/la-it>