13. Úvod do spektrální teorie

Úvod do spektrální teorie

1. Vlastní čísla a vektory
2. Charakteristický mnohočlen a spektrum
3. Invariantnost vzhledem k podobnosti
4. Součet a součin vlastních čísel
5. Lokalizace vlastních čísel
6. Spektrum reálné symetrické matice
7. Spektrální rozklad reálné symetrické matice

13.1 Vlastní čísla a vektory

DEFINICE 1
Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ je lineární transformace definovaná na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Jestliže existuje nenulový vektor $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ a skalár λ tak, že

$$A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}, \qquad (*)$$

pak se λ nazývá *vlastní číslo* transformace A, **e** se nazývá *vlastní vektor* příslušný k λ a $(\lambda, \mathbf{e})$ se nazývá *vlastní dvojice* transformace A.

V případě konečněrozměrných vektorových prostorů ztotožňujeme lineární transformaci s její maticí vzhledem k nějaké bázi. Pak mluvíme o vlastních číslech a vektorech čtvercové matice pro něž platí analogický vztah ke vztahu $(*)$.

13.1 Vlastní čísla a vektory

Rovnost $(*)$ si můžeme zapsat pomocí identity ve tvaru

$$(A - \lambda I)\mathbf{e} = \mathbf{o},$$

takže λ *je vlastním číslem* A, *právě když* $A - \lambda I$ *není prosté zobrazení, a vlastní vektory* A *příslušné k* λ *jsou prvky jádra* $A - \lambda I$.

Množina všech vlastních čísel $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ je podmnožinou množiny $\sigma(A)$ všech skalárů λ, pro které neexistuje $(A - \lambda I)^{-1}$. Množina $\sigma(A)$ se nazývá *spektrum* transformace A a pro transformace prostorů konečné dimenze je totožná s množinou všech vlastních čísel A.

V případě konečněrozměrných vektorových prostorů ztotožňujeme

lineární transformaci s její maticí vzhledem k nějaké bázi. Pak

13.1 Vlastní čísla a vektory

PŘÍKLAD 1 Nechť
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Pak vektory standardní báze $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ odpovídající po řadě vlastním číslům 1 a 2, neboť
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 2 Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor a I je identické zobrazení definované na $\mathcal{V}$. Pak pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí
$$I\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{v},$$
takže každý nenulový vektor je vlastním vektorem identity odpovídající vlastnímu číslu 1 a $\sigma(I) = \{1\}$.

13.2 Charakteristický mnohočlen a spektrum

Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice, tak násobení maticí $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ není prosté zobrazení, právě když $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ je singulární. Pak skalár $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, právě když $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Výraz $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ se nazývá *charakteristický mnohočlen* matice $\mathbf{A}$ a každé vlastní číslo $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ je kořenem *charakteristické rovnice*

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

Podle takzvané základní věty algebry má každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty alespoň jeden komplexní kořen. Odtud vyplývá, že *každá čtvercová matice* považovaná za transformaci konečněrozměrného komplexního prostoru *má neprázdné spektrum*.

13.2 Charakteristický mnohočlen a spektrum

PŘÍKLAD 3 Vypočtěte vlastní čísla a vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

odkud $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1.$

Vlastní vektory matice **A** vypočteme postupně řešením soustav $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{e} = \mathbf{o}$

$$\lambda_1 : \quad \begin{array}{rr} -x_1 & +x_2 = 0 \\ x_1 & -x_2 = 0 \end{array} \qquad\qquad \lambda_2 : \quad \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0, \end{array}$$

odkud

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

13.3 Invariantnost vzhledem k podobnosti

Nechť **A** je libovolná čtvercová matice a nechť

$$\mathbf{Ae} = \lambda\mathbf{e}.$$

Po přenásobení této rovnice libovolnou regulární maticí **T** dostaneme

$$\mathbf{TAe} = \lambda\mathbf{Te},$$

odtud

$$\mathbf{TAT}^{-1}(\mathbf{Te}) = \lambda(\mathbf{Te}).$$

Odtud plyne, že *podobné matice mají stejná vlastní čísla*.

Použitím věty o součinu determinantů dostaneme

$$\det(\mathbf{TAT}^{-1} - \lambda\mathbf{I}) = |\mathbf{TAT}^{-1} - \lambda\mathbf{TIT}^{-1}| = |\mathbf{T}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}^{-1}| =$$
$$= |\mathbf{T}||\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{T}^{-1}| = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}),$$

takže *podobné matice mají stejný charakteristický mnohočlen*.

13.4 Součet a součin vlastních čísel

LEMMA 1 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice n-tého řádu. Pak

1. $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det \mathbf{A}$
2. $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ (tzv. *stopa matice*)

DŮKAZ: Nechť $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + p_{n-2}(\lambda)$, kde p_{n-2} je mnohočlen řádu nejvýše $n - 2$.

Tento charakteristický mnohočlen můžeme dále upravit na tvar

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-\lambda)^n + (a_{11} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + q_{n-2}(\lambda),$$

s mnohočlenem q_{n-2} stupně nejvýše $n - 2$.

Charakteristický mnohočlen lze také rozložit na součin kořenových činitelů

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) =$$
$$= (-\lambda)^n + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(-\lambda)^{n-1} + \cdots + \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Po dosazení $\lambda = 0$ do posledního výrazu dostaneme

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

a porovnáním koeficientů u $(-\lambda)^{n-1}$

$$a_{11} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

13.5 Lokalizace vlastních čísel

VĚTA 1 (GERŠGORIN)
Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová komplexní matice řádu n a nechť

$r_i = |a_{i1}| + \cdots + \widehat{|a_{ii}|} + \cdots + |a_{in}|$ a $\mathcal{S}_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\}$,

kde stříška nad symbolem značí jeho vynechání. Pak

$$\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{S}_n.$$

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = [x_i]$ a $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. Pak $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = \lambda x_i$, odkud převedením členu $a_{ii}x_i$ na pravou stranu dostaneme

$$a_{i1}x_1 + \cdots + \widehat{a_{ii}x_i} + \cdots + a_{in}x_n = (\lambda - a_{ii})x_i.$$

Pomocí vlastností absolutní hodnoty tak snadno ověříme, že platí

$$|a_{i1}||x_1| + \cdots + \widehat{|a_{ii}||x_i|} + \cdots + |a_{in}||x_n| \geq |\lambda - a_{ii}||x_i|. \qquad (*)$$

Nechť i je takové, že $|x_i| = \max_j |x_j|$. Jelikož $|x_i| > 0$, platí $|x_j|/|x_i| \leq 1$.

Vydělíme-li rovnost $(*)$ $|x_i|$, dostaneme

$$|a_{i1}| + \cdots + \widehat{|a_{ii}|} + \cdots + |a_{in}| \geq |\lambda - a_{ii}|,$$

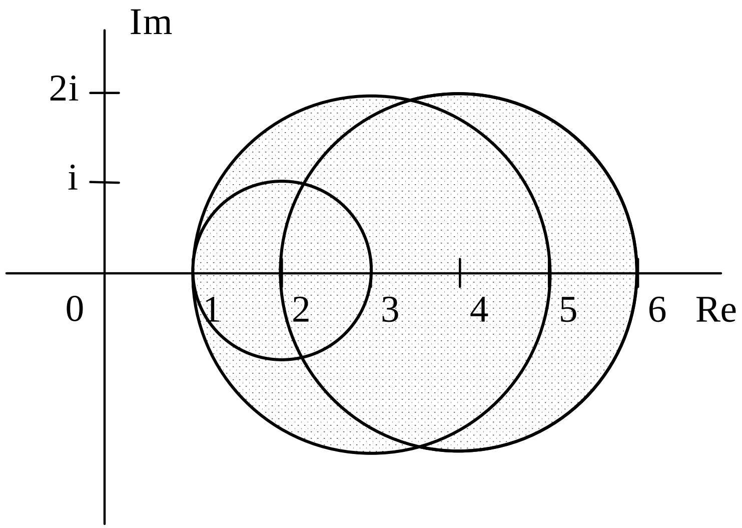
tedy $\lambda \in \mathcal{S}_i$.

13.5 Lokalizace vlastních čísel

PŘÍKLAD 4 Pomocí Geršgorinovy věty najděte co nejmenší část komplexní roviny, která obsahuje spektrum matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & i & 4 \end{bmatrix}$$

ŘEŠENÍ: $r_1 = |i| + |0| = 1, r_2 = 1 + 1 = 2, r_3 = 1 + |i| = 2$. Odtud $\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 2| \leq 1\}, \mathcal{S}_2 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 3| \leq 2\}, \mathcal{S}_3 = \{x \in \mathbb{C} : |x - 4| \leq 2\}$, takže $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. Část komplexní roviny obsahující $\sigma(\mathbf{A})$ je na obrázku, kde je vyšrafována oblast obsahující $\sigma(\mathbf{A})$. Z obrázku plyne, že $0 \notin \sigma(\mathbf{A})$, takže matice $\mathbf{A}$ je regulární.



13.6 Spektrum reálné symetrické matice

VĚTA 2

Nechť $\mathbf{A}$ je reálná symetrická matice. Pak $\sigma(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}$.

DŮKAZ: Nechť λ je komplexní vlastní číslo reálné symetrické matice $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu n, jemuž přísluší vlastní vektor $\mathbf{e} = [e_i]$, takže

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \qquad (*)$$

Pak pro $\overline{\lambda}$ komplexně sdružené s λ a vektor $\overline{\mathbf{e}} = [\overline{e_j}]$ se složkami $\overline{e_j}$ komplexně sdruženými s e_j platí

$$[\mathbf{A}\overline{\mathbf{e}}]_i = a_{i1}\overline{e_1} + \cdots + a_{in}\overline{e_n} = \overline{a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n} = \overline{\lambda e_i} = \overline{\lambda}\,\overline{e_i} = \left[\,\overline{\lambda}\overline{\mathbf{e}}\,\right]_i$$

pro každý index i, takže

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{e}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{e}}. \qquad (**)$$

Přenásobíme-li nyní rovnici $(*)$ zleva $\overline{\mathbf{e}}^\top$ a rovnici $(**)$ zleva $\mathbf{e}^\top$, dostaneme

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\mathbf{e}}^\top\mathbf{A}\mathbf{e} & = & \lambda\overline{\mathbf{e}}^\top\mathbf{e} & = & \lambda\left(|e_1|^2 + \cdots + |e_n|^2\right), \\ \mathbf{e}^\top\mathbf{A}\overline{\mathbf{e}} & = & \overline{\lambda}\mathbf{e}^\top\overline{\mathbf{e}} & = & \overline{\lambda}\left(|e_1|^2 + \cdots + |e_n|^2\right), \end{array}$$

odkud s pomocí

$$\overline{\mathbf{e}}^\top\mathbf{A}\mathbf{e} = \left(\overline{\mathbf{e}}^\top\mathbf{A}\mathbf{e}\right)^\top = \mathbf{e}^\top\mathbf{A}\overline{\mathbf{e}}$$

snadno odvodíme $\lambda = \overline{\lambda}$.

13.6 Spektrum reálné symetrické matice

VĚTA 3
Vlastní vektory reálné symetrické matice **A** odpovídající různým vlastním číslům jsou ortogonální.

DŮKAZ: Předpokládejme, že $\lambda \neq \mu$ jsou vlastní čísla matice **A**, kterým odpovídají vlastní vektory **e** a **f**, takže

$$\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \quad \text{a} \quad \mathbf{A}\mathbf{f} = \mu \mathbf{f}. \qquad (*)$$

Přenásobíme-li rovnice $(*)$ postupně zleva $\mathbf{f}^\top$ a $\mathbf{e}^\top$, dostaneme

$$\mathbf{f}^\top\mathbf{A}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{f}^\top\mathbf{e} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}^\top\mathbf{A}\mathbf{f} = \mu \mathbf{e}^\top\mathbf{f},$$

odkud s pomocí

$$\mathbf{f}^\top\mathbf{A}\mathbf{e} = \left(\mathbf{f}^\top\mathbf{A}\mathbf{e}\right)^\top \mathbf{e}^\top\mathbf{A}\mathbf{f} \quad \text{a} \quad \mathbf{f}^\top\mathbf{e} = \left(\mathbf{f}^\top\mathbf{e}\right)^\top = \mathbf{e}^\top\mathbf{f}$$

plyne

$$\lambda \mathbf{f}^\top\mathbf{e} = \mu \mathbf{f}^\top\mathbf{e}.$$

Pro $\lambda \neq \mu$ tedy musí platit $\mathbf{f}^\top\mathbf{e} = 0$.

13.7 Spektrální rozklad

VĚTA 4
Nechť **A** je reálná symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice **U** a diagonální matice **D** tak, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}.$$

Řádky $\mathbf{r}_i^{\mathbf{U}}$ matice **U** jsou transponované ortonormální vlastní vektory matice **A** příslušné vlastním číslům $\lambda_i = [\mathbf{D}]_{ii}$.

PŘÍKLAD 5 Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Pak **A** má vlastní čísla $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$, kterým odpovídají vlastní vektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

13.7 Spektrální rozklad

PŘÍKLAD 5 (*Pokračování*) Jelikož

$$\|\mathbf{e}_1\| = \sqrt{\mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{e}_2\| = \sqrt{\mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_2} = \sqrt{2},$$

můžeme sestavit z normalizovaných vlastních vektorů matici

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^\top/\|\mathbf{e}_1\| \\ \mathbf{e}_2^\top/\|\mathbf{e}_2\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Snadno si ověříme, že

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \square$$

Pomocí spektrálního rozkladu můžeme definovat *skalární funkci reálné symetrické matice*, která je definována na $\sigma(\mathbf{A})$ předpisem $f(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^\top f(\mathbf{D})\mathbf{U}$, kde $f(\mathbf{D}) = \mathrm{diag}\,(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))$.

13.7 Spektrální rozklad

PŘÍKLAD 6 Vypočtěte $\sqrt{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

ŘEŠENÍ: Podle příkladu 4 platí $\mathbf{A} = \mathbf{U}^\top \mathbf{D} \mathbf{U}$, kde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odtud

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^\top \sqrt{\mathbf{D}} \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Přímým výpočtem si můžeme ověřit, že

$$\sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}.$$