

Inverzní matice

1. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Určete inverzní matici A^{-1} k matici A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Je dána matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- a) určete matici A^{-1}
b) pomocí matice A^{-1} určete řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

5. Užitím inverzní matice řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \end{aligned}$$

6. Vypočítejte výhodně maticový výraz $C^{-1}A\underline{v} + C^{-1}B\underline{v}$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7. Jakou maticí musíme vynásobit matici typu $3/3$ aby se provedla operace

$$r_1 - r_2 + 5r_3 \rightarrow r_2$$

8. Užitím inverzní matice řešte soustavy rovnic $Ax = B$, $Ax = C$, $Ax = D$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

9. Nechť A , B jsou regulární matice řádu n . Dokažte, že platí

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

10. Nechť A je regulární matice. Dokažte, že platí: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Výsledky

1. $A^{-1} = \frac{1}{9}A$

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 11 & -5 & -4 \\ 8 & -5 & -2 \\ -10 & 5 & 5 \end{bmatrix}, [x_1, x_2, x_3] = [1, 2, 3]$

5. $[x_1, x_2, x_3] = [2, -2, -1]$

6. $C^{-1}A\underline{v} + C^{-1}B\underline{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $[1, 1, 0], [0, 1, 0], [-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}]$