Lineární zobrazení vektorových prostorů

1. Vyšetřete, zda je zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineární, je-li
   a) $\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2 + x_3, x_1 + x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$,
   b) $\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3, x_1^2)$.

2. Rozhodněte, zda je zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineární, je-li
$$\mathscr{A}((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 5x_2 - x_3, -x_1 - 2x_3 - 2).$$

3. Ověřte, zda je zobrazení $\mathscr{A}\colon P_2 \to \mathbb{R}^3$ lineární, přičemž $\mathscr{A}$ je definováno takto:
   $\mathscr{A}(ax^2 + bx + c) = (a + b, a - b, -c)$.

4. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:
   $\mathscr{A}(1, -1) = (2, 3)$, $\mathscr{A}(-1, -1) = (1, 2)$. Určete obraz vektoru $(5, 1)$, tj. $\mathscr{A}(5, 1)$.

5. Je dáno zobrazení $\mathscr{A}\colon P_2 \to P_2$, takové že $\mathscr{A}(p) = p(-x) + p(x + 1)$.
   a) Dokažte, že se jedná o lineární zobrazení.
   b) Určete obraz polynomu $p(x) = 2 - 5x + 6x^2$.

6. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:
$$\mathscr{A}(1, 2, 0) = (2, 3), \quad \mathscr{A}(1, 1, 1) = (0, 1), \quad \mathscr{A}(-1, 3, -1) = (1, 4).$$
   a) Určete obraz vektoru $(6, 1, -7)$, tj. $\mathscr{A}(6, 1, -7)$.
   b) Určete obraz vektoru $(0, 0, -4)$, tj. $\mathscr{A}(0, 0, -4)$.

7. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : P_2 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy
$$\mathscr{A}(x^2 + x) = (1, -1), \qquad \mathscr{A}(x^2 + x + 1) = (-1, 2), \qquad \mathscr{A}(x) = (0, -1).$$
   a) Nalezněte obraz polynomu $-2x^2 + 3x - 4$.
   b) Nalezněte vzor vektoru $(3, -2) \in \mathbb{R}^2$.

8. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ předpisem
$$\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$
   Určete
   a) jádro zobrazení $\mathscr{A}$ a jeho dimenzi,
   b) obor hodnot (obraz) lineárního zobrazení a jeho dimenzi.

9. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definované předpisy:
$$\mathscr{A}(1, 1, -1) = (2, 1), \quad \mathscr{A}(1, -1, 1) = (2, -2), \quad \mathscr{A}(-1, 1, 1) = (0, -3).$$
   Nalezněte jádro lineárního zobrazení $\mathscr{A}$ a určete dimenzi jádra.

10. Je dána lineární transformace $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaná předpisy
$$\mathscr{A}(1,1,0) = (1,-1,1), \qquad \mathscr{A}(1,1,1) = (1,0,1), \qquad \mathscr{A}(0,1,0) = (0,-1,0).$$
a) Nalezněte jádro a určete jeho dimenzi.
b) Nalezněte obor hodnot a určete jeho dimenzi.

11. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ předpisem
$$\mathscr{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, 3x_2 + 4x_3).$$
Nalezněte matici lineárního zobrazení $\mathscr{A}$ vzhledem k bázím E a F, kde E je standardní báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ a $F = \langle f_1, f_1 \rangle$ je báze prostoru $\mathbb{R}^2$. Přitom $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (2,2)$.

12. Je dáno lineární zobrazení $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definované předpisy:
$\mathscr{A}(1,1,-1,0) = (0,0,0)$, $\mathscr{A}(1,2,-1,-2) = (-1,-3,1)$, $\mathscr{A}(1,0,0,-1) = (0,0,0)$, $\mathscr{A}(1,1,1,1) = (5,8,2)$.
Sestavte matici lineárního zobrazení vzhledem ke standardním bázím prostoru $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$.

Výsledky

1. a) ano, b) ne,
2. ne,
3. ano,
4. $(1,0)$,
5. a) ano, b) $5 + 12x + 12x^2$,
6. a) $(\frac{43}{2}, \frac{19}{2})$, b) $(7,3)$,
7. a) $(6,-15)$, b) $1 + 5x + 5x^2 + p(1 + 3x + 2x^2)$,
8. a) $N(\mathscr{A}) = \{\underline{o}\}$, $dim N(\mathscr{A}) = 0$,
   b) $H(\mathscr{A}) = \langle (1,1,1), (-1,1,1), (0,0,1) \rangle$, $dim H(\mathscr{A}) = 3$,
9. $N(\mathscr{A}) = \langle (-1,3,-1) \rangle$, $dim N(\mathscr{A}) = 1$,
10. a) $N(\mathscr{A}) = \langle (0,1,1) \rangle$, $dim N(\mathscr{A}) = 1$,
    b) $H(\mathscr{A}) = \langle (1,0,1), (0,-1,0) \rangle$, $dim H(\mathscr{A}) = 2$,
11. $[\mathscr{A}]_{EF} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$.
12. $[\mathscr{A}]_{EF} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.