Bilineární formy

1. Rozhodněte, zda je zobrazení $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definované pro každé $p, q \in P_2$ předpisem

   (a) $B(p,q) = 4p(0)q(1) + p(2)q(3)$

   (b) $B(p,q) = p(1)q(-1) + p(0)q^2(1)$

   bilineární forma.

2. Je dána bilineární forma $B\colon\ P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$B(p(x), q(x)) = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{kde } p(x), q(x) \in P_2.$$

   Sestavte matici této bilineární formy vzhledem ke standardní bázi prostoru P_2.

3. Je dána bilineární forma $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$B(p,q) = p(2)q(3).$$

   Sestavte matici bilineární formy B vzhledem k bázi $E = (p_1, p_2, p_3)$, kde $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - x$, $p_3(x) = (1-x)^2$.

4. Je dána bilineární forma $B\colon P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$B(p,q) = p(0)q(3),$$

   kde $p, q \in P_2$.

   (a) Sestavte matici bilineární formy B vzhledem k bázi $F = (p_1, p_2, p_3)$, kde $p_1 = 1$, $p_2 = x - 1$, $p_3 = (x-1)^2$.

   (b) Určete souřadnice polynomů $p(x) = x+1$ a $q(x) = x^2+1$ v bázi $F = (p_1, p_2, p_3)$.

   (c) Pomocí matice bilineární formy vyčíslete $B(p,q)$ pro polynomy $p(x)$, $q(x)$.

5. Je dána bilineární forma $B\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$B(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_3.$$

   (a) Určete její symetrickou a antisymetrickou část.

   (b) Určete matici bilineární formy B vzhledem ke standardní bázi, matici symetrické části B a matici antisymetrické části B.

6. Rozložte matici bilineární formy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   na součet symetrické a antisymetrické části.

Výsledky

1. (a) ano, (b) ne,

2. $[B] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $[B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

4. (a) $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $p = (2, 1, 0)$, $q = (2, 2, 1)$,

   (c) $B(p, q) = 10$,

5. (a) $B^S(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 - x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{3}{2}x_3y_1 - \frac{1}{2}x_3y_2,$
   $B^A(x, y) = -x_1y_2 + \frac{3}{2}x_1y_3 + x_2y_1 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{3}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_3y_2,$

   (b) $[B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [B^S] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, [B^A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

6. $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$