Kvadratické formy

1. Je dána bilineární forma $B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem
$$B(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_1 - 3x_2y_2.$$
Najděte kvadratickou formu příslušnou bilineární formě B a její matici.

2. Je dána bilineární forma $B : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem
$$B(p(x), q(x)) = p(-1)q(2) + p(2)q(1)$$
   (a) Nalezněte matici bilineární formy vzhledem ke standardní bázi $E = (x^2, x, 1)$ a potom nalezněte matice její symetrické a antisymetrické části.

   (b) Určete obraz dvojice polynomů $p(x) = -3x^2 + 5x + 2$ a $q(x) = 4x^2 - 2x$ v bilineární formě.

   (c) Je kvadratická forma Q v P_2 daná předpisem $Q(p(x)) = 8a^2 + 2c^2 + 4ab + {} + 10ac + 4bc$, příslušná k bilineární formě B, jestliže $p(x) = ax^2 + bx + c$? Své tvrzení zdůvodněte!

3. Klasifikujte následující kvadratické formy:

   (a) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 3x_2^2 - 2x_1x_2,$

   (b) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -3x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3,$

   (c) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3,$

   (d) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3,$

   (e) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3.$

4. Je dána kvadratická forma Q. Určete bázi, ve které má tato kvadratická forma diagonální matici a formu klasifikujte.

   (a) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2,$

   (b) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2,$

   (c) $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2,$

   (d) $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + 29x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 4x_2x_3.$

5. Najděte diagonální matici D, která je kongruentní s maticí A:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Výsledky

1. $Q(x) = x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2$,

   $[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

2. (a) $[B] = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}, [B^S] = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}, [B^A] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) $B(p, q) = -62$,

   (c) ano.

3. (a) indefinitní,

   (b) negativně definitní,

   (c) indefinitní,

   (d) indefinitní,

   (e) pozitivně definitní.

4. (a) indefinitní, báze $D = ((1, 0), (1, -3))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

   (b) negativně definitní, báze $D = ((1, 0), (1, 2))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$.

   (c) negativně semidefinitní, báze $D = ((1, 0), (1, -2))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (d) pozitivně definitní, báze $D = ((1, 0, 0), (-1, 1, 0), (5, -2, 1))$, $[Q]_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

5. Například $[Q] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$.