Číselné posloupnosti a řady

Def. Funkce, jejíž definiční obor je množina přirozených čísel **N**, nebo její podmnožina, se nazývá ***posloupnost***.

Podle definičního oboru rozlišujeme ***konečnou*** a ***nekonečnou posloupnost***.
Jednotlivé hodnoty funkce, která je posloupností, nazýváme ***členy posloupnosti***.
Funkční hodnotu posloupnosti v bodě $n \in \mathbf{N}$ nazýváme ***n-tý člen posloupnosti***, a ozn. $\boldsymbol{a_n}$.
Poslopnost budeme označovat takto: $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$

Př. $\left(n + (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$ (tj. posloupnost: 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, …)

Zadání posloupnosti:

- vzorcem pro n-tý člen

  př. $a_n=5n+1$, $n\geq 1$, $(5n+1)_{n=1}^{\infty}$

- rekurentně

  př. $a_1=-3$, $a_{n+1}=2a_n+1$

- výčtem prvků (nejednoznačné)

  př. 1, 4, 9, 16, 25, …

Př. Je dána posloupnost $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 2 - a_n$.. Vyjádřete tuto poslounost vzorcem pro n-tý člen. [*řešení*: $\left(1 + (-1)^n\right)_{n=1}^{\infty}$]

Př. Je dána posloupnost $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$. Vyjádřete tuto posloupnost vzorcem pro n-tý člen.

[*řešení*: $\left(2^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$]

Př. Je dána posloupnost $\left(\log 3^n\right)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete jí rekurentně.

[*řešení*: $a_1 = \log 3, a_{n+1} = a_n + \log 3$]

Př. Je dána posloupnost $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete jí rekurentně.

[*řešení*: $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n}{n+2}$]

Speciální posloupnosti:

aritmetická posloupnost

Def. Posloupnost se nazývá ***aritmetická***, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n platí: $a_{n+1} = a_n + d$.

Číslo d se nazývá ***diference***.

Př. $a_1 = 3$, $d = -2$. (tj. posloupnost: 3, 1, -1, -3, -5, -7, …)

V aritmetické posloupnosti s diferencí d platí:

- n-tý člen je dán vztahem $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
- mezi libovolnými dvěma členy a_r a a_s je vztah $a_r = a_s + (r - s) \cdot d$
- součet s_n prvních n členů posloupnosti je $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Př. Vypočítejte součet všech trojciferných čísel, která jsou dělitelná jedenácti.

Řešení: 110 + 121 + 132 + … + 990

jde o aritmetickou posloupnost s $d = 11$

určíme počet trojciferných čísel dělitelných 11

$a_n = 990 = a_1 + (n - 1)\, d$

n = 81

součet 81 čísel je tedy = 81/2 · (110 + 990) = 44550

geometrická posloupnost

Def. Posloupnost se nazývá ***geometrická***, právě když existuje reálné číslo q tak, že pro každé přirozené číslo n platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Číslo q se nazývá ***kvocient***.

Př. $a_1 = 1$, $q = 1/2$. (tj. posloupnost: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$)

V geometrické posloupnosti s kvocientem q platí:

- n-tý člen je dán vztahem $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
- mezi libovolnými dvěma členy a_r a a_s je vztah $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$
- součet s_n prvních n členů posloupnosti je $s_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1,$

$$s_n = n \cdot a_1, \quad q = 1.$$

Př. Na počátku roku 1995 žilo ve městě 23600 obyvatel. Kolik obyvatel lze ve městě očekávat na počátku roku 2020, jestliže roční přírůstek se odhaduje na 1,8 % ?

Řešení: poč. 1995 …… 23600

poč. 1996 …… 23600 + 0,018·23600 = 23600·1,O18

poč. 1997 …… 23600·(1,018)2

poč. 1998 …… 23600·(1,018)3

jde o geometrickou posloupnost s q = 1,018

počátkem roku 2020 to bude = 23600· (1,018)25 = 36864 lidí

Def. Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Výraz, který obsahuje členy této posloupnosti $a_1, a_2, \ldots, a_n$, … a má tvar

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots,$$

se nazývá ***nekonečná řada***. Členy posloupnosti jsou též ***členy nekonečné řady***.

Nekonečnou řadu budeme zapisovat takto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Tímto symbolem označujeme nejen číselnou řadu, ale také její součet (pokud ovšem existuje).

Posloupnost, jejíž n-tý člen je roven součtu prvních n členů nekonečné řady nazýváme ***posloupnost částečných součtů*** a ozn. $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Součet s nekonečné řady můžeme vyjádřit jako limitu posloupnosti částečných součtů.

Jestliže je $s \in \mathbf{R}$, říkáme, že řada ***konverguje***.

Jestliže je $s = +\infty$ nebo $s = -\infty$, říkáme, že řada ***diverguje***.

Jestliže součet s neexistuje, říkáme, řada ***osciluje***.

Speciální řady:

- aritmetická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a + (n-1) \cdot d, \quad a, d \in R$
- geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}, \quad a, q \in R$
- harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

<u>Př</u>. Odhadněte 5.-tý a n-tý člen řady, znáte-li první 4 členy. Zapište řadu pomocí sumy a určete n-tý částečný součet s_n. Zdůvodněte konvergenci nebo divergenci řady a existuje-li určete její součet s.

1) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \cdots$

2) $1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49} - \frac{8}{343} + \cdots$

3) $-1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$

4) $\frac{1}{36} + \frac{1}{30} + \frac{1}{25} + \frac{6}{125} + \cdots$

Návod: Všimněte si, že jde ve všech případech o geometrickou řadu.

[*řešení*: 1) $a_5 = \frac{2^6}{5^4}$, $a_n = \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{n-1}}$, $s_n = \frac{20}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$, $s = \frac{20}{3}$; 2) $a_5 = \frac{2^4}{7^4}$, $a_n = \left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^{n-1}$, $s_n = \frac{7}{9}\left(1 - \left(-\frac{2}{7}\right)^n\right)$, $s = \frac{7}{9}$; 3) $a_5 = -1$, $a_n = (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $s_n = -\frac{1}{2}\left(1 - (-1)^n\right)$, s neexistuje; 4) $a_5 = \frac{6^2}{5^4}$, $a_n = \frac{6^{n-3}}{5^{n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36}\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}$, $s_n = \frac{5}{36}\left(\left(\frac{6}{5}\right)^n - 1\right)$, $s = +\infty$]

Př. Určete n-tý částečný součet s_n a existuje-li, určete také součet s dané řady.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$, 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n}{n+1}$,

Návod: U prvních dvou řad využijte rozklad na parciální zlomky a u třetí vlastnosti logaritmu.

[*řešení*: 1) $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}$, $s=1$; 2) $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{3}}{3k-2}-\frac{\frac{1}{3}}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, $s=1$; 3) $s_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{k+1} = \ln\frac{1}{n+1}$, $s=-\infty$]

Náboj: Určete n-tý částečný součet s_n a existuje-li, určete také součet s dané řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$$

Řešení: Daná řada je tvořena dvěmi geom. řadami a jednou nespeciální řadou. Pro zjištění s_n u geom. řad využijeme výše uvedený vzorec pro součet n členů geom. posloupnosti a u třetí řady nám pomůže rozložení na parciální zlomky jejího n-tého členu.

Tedy: 1) $q_1 = \frac{1}{2}$, $s_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$ a součet $s_1 = 1$.

2) $q_2 = -\frac{2}{3}$, $s_n = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{2}{3}}$ a součet $s_2 = -\frac{2}{5}$.

3) $s_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}}{n+2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$ a součet $s_3 = \frac{1}{4}$.

Hledaný součet s dané řady je $\underline{s = s_1 + s_2 + s_3 = \frac{17}{20}}$.

Vzorec pro *n*-tý člen

Otázka zní: „Jak najít vzorec pro n-tý člen posloupnosti, máme-li ji zadanou rekurentním vztahem a nejde o žádnou z výše uvedených speciálních posloupností?“

Je několik možností, jak se vzorce dopátrat. Jednou z nich je vypsat pár prvních členů zadané posloupnosti a na vzorec se snažit přijít bez výpočtů, jen tak z hlavy. Tuto možnost můžeme využít, pokud se nejedná o příliš "složitou" posloupnost. My si ukážeme způsob, který můžeme využít téměř vždy a při kterém využijeme základních znalostí z teorie diferenčních rovnic.

Př. Mějme posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$. Určete tuto posloupnost vzorcem pro n-tý člen.

Řešení: První členy této posloupnosti jsou 2, 7, 29, 133, 641, …

Jak tedy obecně vyjádřit n-tý člen?

Hledejme vzorec ve tvaru $a_n = z^n$.

Dosazením do rekurentního vztahu obdržíme následující rovnici.

$$z^{n+2} - 7z^{n+1} + 10z^n = 0$$

Po vytknutí $z^n (z^2 - 7z + 10) = 0$

Kdyby $z = 0$, muselo by jít o posloupnost s nulovými členy, což není náš případ. Proto $z \neq 0$ a tedy z musí být kořenem kvadrat. trojčlenu (tzv. *charakteristického polynomu*) v závorce.

Odtud tedy $z = 2, z = 5$.

Hledaný vzorec bude lineární kombinací výrazů 2^n a 5^n, tj. ve tvaru $a_n = C_1 2^n + C_2 5^n$, kde C_1 a C_2 jsou reálné konstanty. Jejich hodnoty získáme dořešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých C_1 a C_2, které sestavíme z podmínek kladených na první dva členy zadané posloupnosti

$$2 = C_1 2^1 + C_2 5^1, \qquad 7 = C_1 2^2 + C_2 5^2$$

a obdržíme řešení $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{5}$.

Vzorec pro n-tý člen je tedy $a_n = \frac{1}{2} 2^n + \frac{1}{5} 5^n$ po úpravě $\underline{a_n = 2^{n-1} + 5^{n-1}}$.

Ukažme si ještě jeden příklad. V něm uvedeme strategii, jak postupovat, jestliže z bude vícenásobným kořenem kvadratického trojčlenu.

Př. Nechť je posloupnost zadána rekurentně $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$. Určete tuto posloupnost vzorcem pro n-tý člen.

Řešení: Opět hledejme vzorec ve tvaru $a_n = z^n$.

Charakteristický polynom je tentokrát $z^2 - 2z + 1 = 0$.

Řešením tohoto polynomu je jeden dvojnásobný kořen $z_{1,2} = 1$.

Hledaný vzorec bude lineární kombinací výrazů 1^n a $n1^n$. Výrazy, ze kterých vytváříme lin. kombinaci musí být nezávyslé, což zaručíme vynásobením jednoho z výrazů 1^n výrazem n a přitom zachováme správné řešení.

Vzorec bude tedy ve tvaru $a_n = C_1\, 1^n + C_2\, n1^n$, kde vzhledem k hodnotám prvních dvou členů posloupnosti jsou pak $C_1=1$, $C_2=1$.

Jedná se tedy o posloupnost, kde n-tý člen je $\underline{a_n = 1 + n}$.

Př. Stejným postupem můžeme zjistit i vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, jejíž rekurentní zadání je $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

[*Řešení*: $a_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$]

Problém nastane, když v rekurentním vztahu je zahrnut navíc výraz proměnné n. Na dalším příkladě si ukážeme, jak se s tímto problémem vypořádat.

Př. Je dána posloupnost $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n n$. Určete tuto posloupnost vzorcem pro n-tý člen.

Řešení: Postup určení n-tého členu nyní rozdělíme na dvě části. Hledaný vzorec pak bude vyjádřen jako součet řešení z těchto dvou částí.

1. Výraz proměnné n položíme roven 0. Tím obdržíme zadání, které již umíme vyřešit výše uvedeným postupem.

Tedy $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 2a_n$. Charakteristický polynom je $z - 2 = 0$. Kořenem polynomu je 2. První část hledaného vzorce je $\overline{a_n} = C_1 2^n$, kde C_1 je reálná konstanta. Její hodnotu zjistíme v úplném závěru řešení z podmínky na první člen posloupnosti.

2. Druhou část řešení budeme hledat v analogickém tvaru, jako je výraz proměnné n, který jsme v první části položili roven 0 a jež můžeme upravit obecně do tvaru $\rho^n \cdot P_s(n)$, kde $\rho \in R$ a $P_s(n)$ polynomy s-tého stupně proměnné n. Takže druhá část řešení bude mít tvar $\overline{\overline{a_n}} = n^r \cdot \rho^n \cdot Q_s(n)$, kde r je hodnota násobnosti kořene ρ charakteristického polynomu

a $Q_s(n)$ polynomy s-tého stupně proměnné n s neurčitými koeficienty. Tyto koeficienty získáme dosazením $\overline{\overline{a_n}}$ do rekurentního zadání a následným výpočtem.

V našem případě je výraz proměnné n ve tvaru $2^n n$ (tj. $\rho = 2$, $P_s(n) = n$, tedy $s = 1$). Podíváme-li se na charakteristický polynom, zjistíme, že ρ je jeho kořenem a to jednonásobným, proto $r = 1$. Polynom $Q_s(n)$ musí být také polynomem prvního stupně, a tedy $Q_s(n) = An + B$, kde $A, B \in R$.

Tvar druhé části řešení je $\overline{\overline{a_n}} = n^1 \cdot 2^n \cdot (An + B) = 2^n \cdot (An^2 + Bn)$.

Dosazením do zadání dostáváme $\quad 2^{n+1}(A(n+1)^2 + B(n+1)) = 2 \cdot 2^n \cdot (An^2 + Bn) + 2^n n$,

po úpravách $\quad 4An + (2A + 2B) = n$.

Porovnáním koeficientů polynomů na pravé a levé straně obdržíme $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$.

Druhá část hledaného vzorce je $\overline{\overline{a_n}} = 2^n \frac{1}{4}(n^2 - n)$.

Vzorec pro n-tý člen je $a_n = \overline{a_n} + \overline{\overline{a_n}} = C_1 2^n + 2^n \frac{1}{4}(n^2 - n)$, kde $C_1 \in R$.

Protože $a_1 = 5$ je $C_1 = \frac{5}{2}$.

Jedná se tedy o posloupnost, kde n-tý člen je $\underline{a_n = 5 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-2}(n^2 - n)}$.

Náboj: Stanovte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3^n}$.

Řešení: Nejprve určíme s_n, tj. posloupnost částečných součtů.

Rozepíšeme-li danou řadu je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3^n} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, kde $a_n = \frac{n^2 + 2}{3^n}$.

Protože $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ a $s_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1}$,

vidíme, že $s_{n+1} - s_n = a_{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 2}{3^{n+1}}$, tedy $s_{n+1} - s_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{2}{3}n + 1\right)$ a $s_1 = 1$, což je rekurentně zadaná posloupnost a k najití vzorce pro n-tý člen můžeme využít postup uvedený v předchozím příkladě. Obdržíme řešení $s_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n (n^2 + n + 4) + 2$. Součet řady vypočteme jako limitu této posloupnosti a tedy $\underline{s = 2}$.