5. Vektorové prostory

Vektorové prostory

1. Algebraické operace
2. Vektorový prostor
3. Vlastnosti vektorových prostorů
4. Vektorové podprostory
5. Součet a průnik podprostorů
6. Vektory v matematice a ve fyzice

5.1 Algebraické operace

DEFINICE 1
(Binární) *algebraická operace* $\circ$ na neprázdné množině $\mathcal{A}$ je zobrazení

$$\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (a, b) \mapsto a \circ b \in \mathcal{A}.$$

Operace $\circ$ na množině $\mathcal{A}$ tedy každé uspořádané dvojici $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ prvků $a, b \in \mathcal{A}$ přiřazuje jednoznačně určený prvek $a \circ b \in \mathcal{A}$.

PŘÍKLAD 1 Sčítání $+$ definované na množině reálných čísel $\mathbb{R}$, které například dvojici $(2, 3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ přiřazuje prvek $2 + 3 = 5 \in \mathbb{R}$.

5.1 Algebraické operace

PŘÍKLAD 2 Sčítání reálných (komplexních) aritmetických vektorů stejné dimenze nebo sčítání a násobení reálných (komplexních) čtvercových matic stejného řádu.

PŘÍKLAD 3 Skládání zobrazení $\circ$ definované na množině všech zobrazení $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ dané množiny $\mathcal{A}$ do sebe. Tato operace přiřazuje každé uspořádané dvojici zobrazení $(f, g) \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}) \times \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ složené zobrazení $f \circ g \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ definované pro každé $x \in \mathcal{A}$ předpisem

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Jestliže například $f \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ a $g \in \mathcal{Z}(\mathbb{R})$ jsou definovány předpisem $f(x) = x^2$ a $g(x) = x^2 + 1$, pak

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(x^2 + 1\big)^2.$$

5.2 Vektorový prostor

DEFINICE 2

Reálným (komplexním) vektorovým prostorem rozumíme množinu $\mathcal{V}$ s algebraickou operací $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}{+}v \in \mathcal{V}$, kterou nazýváme *sčítání vektorů* a zobrazením $\mathbb{R}(\mathbb{C}) \times \mathcal{V} \ni (\alpha, \mathbf{v}) \mapsto \alpha\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, které nazýváme *násobení skalárem*, přičemž platí:

VP1 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

VP2 $\exists \mathbf{o} \in \mathcal{V} \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

VP3 $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \exists -\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{o}$

VP4 $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

VP5 $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$

VP6 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

VP7 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

VP8 $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} : 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

5.2 Vektorový prostor

PŘÍKLAD 4 Reálné aritmetické vektory daného řádu n se sčítáním vektorů a s násobením skalárem po složkách tvoří reálný vektorový prostor. Jeho nulový prvek je $\mathbf{o} = [0, \dots, 0]$, pro $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]$ je inverzním prvkem $-\mathbf{a} = [-a_1, \dots, -a_n]$. Pro $n = 1$ je množina skalárů i vektorů stejná.

PŘÍKLAD 5 Množina $\mathcal{F}$ všech reálných funkcí s operací $+$ definovanou pro každé reálné x rovností

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

a s násobením skalárem, které pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{F}$ definuje funkci $\alpha f \in \mathcal{F}$ rovností $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, tvoří reálný vektorový prostor. Nulový prvek o tohoto prostoru je dán předpisem $o(x) = 0$, prvek opačný k f je definován pomocí $(-f)(x) = -f(x)$.

5.3 Vlastnosti vektorových prostorů

VĚTA 1

Nechť $\mathcal{V}$ je vektorový prostor s nulovým prvkem $\mathbf{o}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ a nechť α je libovolný skalár. Pak platí následující rovnosti:

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{o}$
2. $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$
3. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

DŮKAZ:

1. $0\mathbf{u} \overset{VP2}{=} 0\mathbf{u} + \mathbf{o} \overset{VP3}{=} 0\mathbf{u} + \Big(0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big)\Big) \overset{VP1}{=} (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \big(-(0\mathbf{u})\big) =$
   $\overset{VP6}{=} (0+0)\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) = 0\mathbf{u} + \big(-(0\mathbf{u})\big) \overset{VP3}{=} \mathbf{o}.$
2. Použijeme-li 1 pro $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, dostaneme $0\mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže
   $$\alpha\mathbf{o} = \alpha(0\mathbf{o}) \overset{VP7}{=} (\alpha 0)\mathbf{o} = 0\mathbf{o} = \mathbf{o}.$$
3. $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{VP8}{=} 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} \overset{VP6}{=} \big(1 + (-1)\big)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} \overset{1}{=} \mathbf{o}.$

5.4 Vektorový podprostor

DEFINICE 3

Neprázdná množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je *podprostorem* vektorového prostoru $\mathcal{V}$, jestliže $\mathcal{U}$ je vektorový prostor vzhledem ke sčítání vektorů a násobení skalárem v prostoru $\mathcal{V}$.

VĚTA 2

Množina $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{V}$ právě tehdy, když pro libovolné dva prvky $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a pro libovolný skalár α platí:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$
2. $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$

DŮKAZ: Z 2 plyne $0\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ i $(-1)\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, takže podle 1. a 3. věty 1 také nulový prvek $\mathbf{o} = 0\mathbf{u}$ i opačný prvek $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$ patří do $\mathcal{U}$. Ostatní axiomy vektorového prostoru jsou splněny zřejmě také.

5.4 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 6 Nechť p je pevně zvolená přímka v prostoru procházející zvoleným počátkem souřadnic. Pak množina všech polohových vektorů bodů na přímce p tvoří podprostor vektorového prostoru všech vázaných vektorů v prostoru.

PŘÍKLAD 7 Pro dané $k \geq 1$ je množina $\mathcal{P}_k$ všech mnohočlenů stupně menšího než k podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{F}$ z příkladu 5.

PŘÍKLAD 8 Nechť $\mathcal{V}$ je libovolný prostor. Pak $\mathcal{O} = \{\mathbf{o}\}$ je podprostorem $\mathcal{V}$, neboť $\mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$ a pro libovolný skalár α platí, že $\alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$. Vektorový prostor $\mathcal{O}$ je nejmenší podprostor daného vektorového prostoru a nazývá se *nulovým podprostorem*.

5.4 Vektorový podprostor

PŘÍKLAD 9 Nechť $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ je konečná množina vektorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Množina všech vektorů, které lze zapsat ve tvaru $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathcal{V}$, který nazýváme *lineární obal* množiny $\mathcal{S}$. Lineární obal dané množiny vektorů $\mathcal{S}$ značíme $\langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$.

PŘÍKLAD 10 $\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\}$ tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Vyřešíme-li soustavu jedné rovnice o třech neznámých $u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$ dostaneme řešení ve tvaru $u_1 = 2t - s, u_2 = t, u_3 = s$ s parametry $t, s \in \mathbb{R}$. Pak můžeme podprostor $\mathcal{U}$ zapsat ve tvaru:

$$\mathcal{U} = \{[2t - s, t, s], t, s \in \mathbb{R}\} = \{t[2, 1, 0] + s[-1, 0, 1], t, s \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \langle [2, 1, 0], [-1, 0, 1] \rangle .$$

5.5 Součet a průnik podprostorů

Pro libovolné dva podprostory $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ daného vektorového prostoru $\mathcal{W}$ můžeme vytvořit *průnik podprostorů* $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ jako průnik množin $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ a *součet podprostorů*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}.$$

Průnik podprostorů není nikdy prázdný, neboť do něho vždy patří nulový prvek.

VĚTA 2
Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ jsou podprostory vektorového prostoru $\mathcal{W}$. Pak $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ i $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ jsou podprostory $\mathcal{W}$.

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, tedy $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Jelikož $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ jsou podprostory téhož prostoru, platí $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ a $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, tedy $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, a pro libovolný skalár α platí také $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ i $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, takže $\alpha\mathbf{u} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Důkaz, že $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ je podprostorem $\mathcal{W}$ je obdobný.

5.5 Součet a průnik podprostorů

PŘÍKLAD 11 Jsou dány podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$:
$\mathcal{U} = \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0\}$ a
$\mathcal{V} = \{[v_1, v_2, v_3] \in \mathbb{R}^3 : v_2 + v_3 = 0\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \cap \mathcal{V} &= \{[u_1, u_2, u_3] \in \mathbb{R}^3 : u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \wedge u_2 + u_3 = 0\} = \\
&= \{[u_1, u_2, u_3] : u_1 = -3t, u_2 = -t, u_3 = t, t \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{[-3t, -t, t], t \in \mathbb{R}\} = \langle [-3, -1, 1] \rangle \\
\mathcal{U} + \mathcal{V} &= \{[u_1, u_2, u_3] : u_1 = 2t - s, u_2 = t, u_3 = s, t, s \in \mathbb{R}\} + \\
&+ \{[v_1, v_2, v_3] : v_1 = p, v_2 = -q, v_3 = q, p, q \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{[2t - s + p, t - q, s + q], t, s, p, q \in \mathbb{R}\} = \\
&= \langle [2, 1, 0], [-1, 0, 1], [1, 0, 0], [0, -1, 1] \rangle
\end{aligned}$$

Jestliže průnik podprostorů $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ daného vektorového prostoru $\mathcal{W}$ je nulový podprostor $\mathcal{O}$, pak se součet $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ nazývá *direktní (přímý) součet podprostorů* a značí se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

5.6 Vektory v matematice a fyzice

- Vektorové prostory zobecňují pojem vektoru známého např. z fyziky, tj. veličina mající velikost a směr
  - Nejedná se o veličiny, které mají velikost a směr (Co je velikost vektoru z prostoru všech funkcí $\mathcal{F}$?)
  - Dokonce i veličiny, které mají velikost a směr nemusí splňovat axiomy vektorového prostoru
- V případě abstraktních vektorů je někdy možné je pro zjednodušení nahradit "šipkami", tj. veličinami, které mají velikost a směr.