

**Cvičení č. 3**

Řešení soustav lineárních rovnic, Gaussova eliminační metoda

Soustava lineárních rovnic:**Definice:** Soustavou  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých nazýváme systém rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$x_1, \dots, x_n$  nazýváme neznámé,  $a_{11}, \dots, a_{mn}$  koeficienty soustavy a čísla  $b_1, \dots, b_m$  nazýváme pravými stranami.

Matici koeficientů soustavy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme matici soustavy a vektory

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ nazýváme vektorem neznámých a vektorem pravých stran.}$$

Soustavu můžeme zapisovat v tzv. maticovém tvaru  $Ax=b$ .Matici  $[A, b]$ , která vznikla tak, že jsme matici soustavy rozšířili vektorem pravých stran nazýváme rozšířenou maticí soustavy.Gaussova eliminační metoda:**Definice:** Elementárními řádkovými úpravami matice rozumíme následující operace:

1. Záměna dvou řádků
2. Vynásobení řádku libovolným nenulovým číslem
3. Přičtení nenulového číselného násobku jednoho řádku k druhému

Cílem Gaussovy eliminační metody je pomocí elementárních řádkových operací převést rozšířenou matici soustavy na matici, která má pod diagonálou nuly.

$$(A, b) \xrightarrow{E, \hat{R}, \hat{U}} (U, b'), U = (u_{ij}), u_{ij} = 0, \forall i > j$$

Poté je možné vypočítat řešení soustavy přímo dosazováním. Více vysvětlí následující příklad.

**Příklad:**

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

Soustavu přepíšeme do maticového tvaru:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací nyní upravíme rozšířenou matici soustavy:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 1 & 3 & -1 & | & 2 \\ 2 & 2 & 3 & | & 15 \end{pmatrix} \cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 3 & 9 & -3 & | & 6 \\ 6 & 6 & 9 & | & 45 \end{pmatrix} \begin{matrix} -r_1 \\ -2r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 0 & 11 & -5 & | & -4 \\ 0 & 10 & 5 & | & 25 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 0 & 11 & -5 & | & -4 \\ 0 & 2 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \cdot 11 \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 0 & 11 & -5 & | & -4 \\ 0 & 22 & 11 & | & 55 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 0 & 11 & -5 & | & -4 \\ 0 & 0 & 21 & | & 63 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{21} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & | & 10 \\ 0 & 11 & -5 & | & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 10$$

$$11x_2 - 5x_3 = -4$$

$$x_3 = 3$$

Dosazením poslední rovnice do druhé dostaneme

$$11x_2 - 5 \cdot 3 = -4 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

a nyní dosazením do první rovnice

$$3x_1 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 10 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

Řešením tedy je vektor

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Provedem ještě zkoušku:

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix} = b$$

Vektor  $x$  je tedy opravdu řešením naší soustavy.

**Příklad:**

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 2 & -1 & 3 & | & -5 \\ 4 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ -4r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & 5 & | & -15 \\ 0 & -5 & 5 & | & -15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -5 & 5 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Jelikož se vynuloval jeden celý řádek, dostáváme nyní pouze 2 rovnice o 3 neznámých.

Budeme tedy volit jednu neznámou jako parametr.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -x_2 + x_3 = -3 \\ \hline \end{array}$$

$$x_3 = t, \quad t \in R$$

$$-x_2 + t = -3 \Leftrightarrow x_2 = t + 3$$

$$x_1 + 2(t+3) - t = 5 \Leftrightarrow x_1 = -t - 1$$

Řešení je tedy nekonečně mnoho s jedním parametrem a můžeme je zapsat ve tvaru

$$x = \begin{pmatrix} -t-1 \\ t+3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in R$$

**Příklad:**

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ +r_2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Z tohoto je vidět, že soustava nemá řešení neboť v poslední rovnici dostáváme, že  $0=2$  což nelze nikdy splnit.

**Poznámka:** Soustava lineárních rovnic může mít následující počet řešení:

1. žádné
2. právě jedno
3. nekonečně mnoho s jedním či více parametry

**Příklad:**

$$x_1 - 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$$

Při zápisu rozšířené matice soustavy, můžeme vynechat sloupec pravých stran, neboť všechny pravé strany jsou nulové a tedy elementárními řádkovými úpravami se nemění.

$$\left( \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & 7 & -7 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{7} \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x_4 = p; \quad p \in R$$

$$x_3 = q; \quad q \in R$$

$$x_2 + q - p = 0 \Leftrightarrow x_2 = p - q$$

$$x_1 - 3(p - q) - q + 5p = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2(p + q)$$

$$x = \begin{pmatrix} -2(p+q) \\ p-q \\ q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} q, p, q \in \mathbb{R}$$

**Poznámka:** Soustavy lineárních rovnic, které mají všechny pravé strany rovny nule nazýváme homogenní. V opačném případě nehomogenní.

**Příklad:**

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2r_1 \\ +r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0$$

$$-5x_2 - 5 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$x_1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Poznámka:** Homogenní soustava má vždy alespoň jedno řešení a tím je řešení nulové. Toto řešení nazýváme řešením triviálním. Netriviální řešení má pouze má-li řešení nekonečně mnoho.

**Příklad:**

$$\begin{aligned} px_1 + x_2 + x_3 &= p \\ x_1 + px_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + px_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 1 & p & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & p & | & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \neq 0 \\ \cdot p \\ \cdot p \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ p & p^2 & p & | & 0 \\ p & p & p^2 & | & p \end{pmatrix} \begin{matrix} -r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p^2-1 & p-1 & | & -p \\ 0 & p-1 & p^2-1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} p \neq -1 \\ \\ \cdot (p+1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p^2-1 & p-1 & | & -p \\ 0 & p^2-1 & (p-1)(p+1)^2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -r_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p^2-1 & p-1 & | & -p \\ 0 & 0 & (p-1)(p+1)^2 - (p-1) & | & p \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p^2-1 & p-1 & | & -p \\ 0 & 0 & p(p-1)(p+2) & | & p \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{p} \sim \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & | & p \\ 0 & p^2-1 & p-1 & | & -p \\ 0 & 0 & (p-1)(p+2) & | & 1 \end{pmatrix}$$

A.  $p \neq 0 \wedge p \neq -1$

1. Nemá řešení

$$\begin{aligned}
 & [(p-1)(p+2) = 0 \vee (p^2 - 1 = 0 \wedge p-1 = 0 \wedge -p \neq 0)] \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow [(p=1 \vee p=-2) \vee ((p=1 \vee p=-1) \wedge p=1 \wedge p \neq 0)] \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow p=1 \vee p=-2
 \end{aligned}$$

2. Právě jedno řešení

$$[(p-1)(p+2) \neq 0 \wedge (p^2 - 1 \neq 0)] \Leftrightarrow [(p \neq 1 \wedge p \neq -2) \wedge (p \neq 1 \wedge p \neq -1)] \Leftrightarrow p \neq 1 \wedge p \neq -2$$

$$\begin{aligned}
 px_1 + x_2 + x_3 &= p \\
 (p^2 - 1)x_2 + (p-1)x_3 &= -p \\
 (p-1)(p+2)x_3 &= 1 \\
 x_3 &= \frac{1}{(p-1)(p+2)}, x_2 = -\frac{p+1}{(p-1)(p+2)}, x_1 = \frac{p^2 + p - 1}{(p-1)(p+2)}
 \end{aligned}$$

B.  $p = 0 \wedge p \neq -1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ -r_2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -r_2 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right), x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

C.  $p \neq 0 \wedge p = -1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} +r_1 \\ +r_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right), x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$