

Cvičení č. 9

Lineární zobrazení. Jádro a obor hodnot. Matice lineárního zobrazení.

Lineární zobrazení**Definice:**Zobrazení $A : U \rightarrow V$, kde U a V jsou vektorové prostory se nazývá lineární, jestliže

1. $\forall u, v \in U : A(u + v) = A(u) + A(v)$
2. $\forall \alpha \in R \forall u \in U : A(\alpha u) = \alpha A(u)$

Množinu všech lineárních zobrazení U do V značíme $A \in L(U, V)$.**Příklad:**Rozhodněte, zda-li zobrazení $A : R^3 \rightarrow R^2$ definované předpisem

$$A([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 - x_2, x_2 + x_3]$$

je lineární.

Řešení:

$$1. \forall u, v \in R^3 : A(u + v) = A(u) + A(v)$$

Zvolme $u = [u_1, u_2, u_3], v = [v_1, v_2, v_3]$. Pak

$$\begin{aligned} A(u + v) &= A([u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3]) = [(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3)] = \\ &= [u_1 - u_2 + v_1 - v_2, u_2 + u_3 + v_2 + v_3] = [u_1 - u_2, u_2 + u_3] + [v_1 - v_2, v_2 + v_3] = A(u) + A(v) \end{aligned}$$

$$2. \forall \alpha \in R \forall u \in R^3 : A(\alpha u) = \alpha A(u).$$

$$\begin{aligned} A(\alpha u) &= A([\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3]) = [(\alpha u_1) - (\alpha u_2), (\alpha u_2) + (\alpha u_3)] = [\alpha(u_1 - u_2), \alpha(u_2 + u_3)] = \\ &= \alpha[u_1 - u_2, u_2 + u_3] = \alpha A(u) \end{aligned}$$

Z 1. a 2. tedy vyplývá, že zobrazení A je lineární. ♦**Příklad:**Rozhodněte, zda-li zobrazení $D : P_3 \rightarrow P_2$ definované předpisem

$$D(p) = 2ax + b, \forall p \in P_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

je lineární.

Řešení:

$$1. \forall p, q \in P_3 : D(p + q) = D(p) + D(q).$$

Zvolme $p(x) = ax^2 + bx + c, q = dx^2 + ex + f$. Pak

$$\begin{aligned} D(p + q) &= D((a + d)x^2 + (b + e)x + (c + f)) = 2(a + d)x + (b + e) = 2ax + b + 2dx + e = \\ &= D(p) + D(q) \end{aligned}$$

$$2. \forall \alpha \in R \forall p \in P_3 : D(\alpha p) = \alpha D(p).$$

$$D(\alpha p) = D((\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + (\alpha c)) = 2(\alpha a)x + (\alpha b) = \alpha(2ax + b) = \alpha D(p)$$

Z 1. a 2. tedy vyplývá, že zobrazení D je lineární. ♦**Příklad:**Rozhodněte, zda-li zobrazení $B : P_3 \rightarrow R^2$ definované předpisem

$B(p) = [a^2, b+c+1], \forall p \in P_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$
je lineární.

Řešení:

$$1. \forall p, q \in P_3 : B(p+q) = B(p) + B(q).$$

Zvolme $p(x) = ax^2 + bx + c, q = dx^2 + ex + f$. Pak

$$\begin{aligned} D(p+q) &= D((a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f)) = [(a+d)^2, (b+e) + (c+f) + 1] = \\ &= [a^2 + 2ad + d^2, b+c+1+e+f+1-1] = [a^2, b+c+1] + [d^2, e+f+1] + [2ad, -1] = \\ &= D(p) + D(q) + [2ad, -1] \neq D(p) + D(q) \end{aligned}$$

Zobrazení B tedy není lineární. ♦

Věta:

Je-li $A \in L(U, V)$ pak pro libovolné skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ a vektory $v_1, \dots, v_n \in U$ platí

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 A(v_1) + \dots + \alpha_n A(v_n).$$

Důsledek:

Lineární zobrazení je jednoznačně definováno obrazy vektorů báze.

Příklad:

Je dáno lineární zobrazení $A : R^3 \rightarrow R^2$ definované předpisy

$$A([1,1,0]) = [1,2],$$

$$A([0,1,1]) = [1,1],$$

$$A([1,0,1]) = [-1,0].$$

Určete obraz $A([2,1,-1])$ a takové $x \in R^3$ aby $A(x) = [3,-1]$.

Řešení:

$$A. \quad A([2,1,-1]) = ?$$

Jelikož, jsou dány obrazy báze R^3 , můžeme nalézt takové $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, že

$$[2,1,-1] = \alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1]$$

$$[2,1,-1] = [\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3]$$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = -1$$

kterou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) -r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) -r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}$$

Podle předchozí věty pak můžeme psát

$$\begin{aligned} A([2,1,-1]) &= A(\alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1]) = \alpha_1 A([1,1,0]) + \alpha_2 A([0,1,1]) + \alpha_3 A([1,0,1]) = \\ &= \alpha_1[1,2] + \alpha_2[1,1] + \alpha_3[-1,0] = 2[1,2] + (-1)[1,1] + 0[-1,0] = [1,3]. \end{aligned}$$

Vektor $[2,1,-1]$ se tedy zobrazí na vektor $[1,3]$, tj. $A([2,1,-1]) = [1,3]$.

B. $x \in R^3, x = ?, A(x) = [3,-1]$

Zkusíme tedy zjistit, zda-li se dá vektor $[3,-1]$ vyjádřit jako kombinace obrazů, pro které máme předepsáno zobrazení.

Dostáváme tedy soustavu 2 rovnic o 3 neznámých

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 3$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

Soustavu řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) - 2r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -7 \end{array} \right)$$

Volíme $\alpha_3 = t, t \in R$ a dostáváme $\alpha_2 = 7 + 2t, \alpha_1 = -4 - t$.

Vektor $[3,-1]$ lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci obrazů. Kdyby tomu tak nebylo, pak by vektor $[3,-1]$ nepatřil do oboru hodnot a pak by neexistoval žádný vektor $x \in R^3$, takový, že $A(x) = [3,-1]$.

Každopádně můžeme psát

$$[3,-1] = (-4-t)[1,2] + (7+2t)[1,1] + t[-1,0], \forall t \in R$$

a tedy

$$\begin{aligned} A(x) &= (-4-t)A([1,1,0]) + (7+2t)A([0,1,1]) + tA([1,0,1]) = \\ &= A((-4-t)[1,1,0] + (7+2t)[0,1,1] + t[1,0,1]) = A([-4, 3+t, 7+3t]), \forall t \in R. \end{aligned}$$

Odtud tedy dostáváme, že $A(x) = [3,-1]$ pro $x = [-4, 3+t, 7+3t], \forall t \in R$.

Na vektor $[3,-1]$ se tedy zobrazí celá množina vektorů

$$\{x \in R^3 : x = [-4, 3+t, 7+3t], \forall t \in R\} = \{x \in R^3 : x = [-4, 3, 7] + [0, 1, 3]t, \forall t \in R\}. \blacklozenge$$

Jádro a obor hodnot lineárního zobrazení

Definice:

Jádrem lineárního zobrazení je množina $N(A) = \{u \in U : A(u) = o\}$.

Oborem hodnot lineárního zobrazení $A \in L(U, V)$ je množina

$$H(A) = \{v \in V : \exists u \in U, A(u) = v\}.$$

Věta:

Nechť $A \in L(U, V)$. Pak jádro tvoří podprostor U a obor hodnot tvoří podprostor V .

Příklad:

Je dáno lineární zobrazení $A : R^3 \rightarrow R^3$ definované předpisy

$$A([1,1,0]) = [1,2,1],$$

$$A([0,1,1]) = [1,1,0],$$

$$A([1,0,1]) = [0,1,1].$$

Nalezněte jádro a obor hodnot tohoto zobrazení a určete jejich dimenze.

Řešení:

A. Hledáme $x \in R^3$ takové, že $A(x) = o$. Tato úloha je analogická případu B. v předchozím příkladě. Hledáme tedy takovou lineární kombinaci, aby

$$[0,0,0] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$$

$$[0,0,0] = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3]$$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

kteřou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \alpha_1 = -t \\ \alpha_2 = t \\ \alpha_3 = t, t \in R \end{array}$$

$$[0,0,0] = -t[1,2,1] + t[1,1,0] + t[0,1,1], \forall t \in R.$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$A(x) = -tA([1,1,0]) + tA([0,1,1]) + tA([1,0,1]) = A(-t[1,1,0] + t[0,1,1] + t[1,0,1]) = A([0,0,2t]).$$

Odtud dostáváme, že $A(x) = [0,0,0]$ pro $x = [0,0,2t], \forall t \in R$.

Jádrem A je tedy množina $N(A) = \{x \in R^3 : x = [0,0,2t], \forall t \in R\} = \langle [0,0,2] \rangle$.

Jelikož samotný vektor $[0,0,2]$ je lineárně nezávislý, tvoří taktéž bázi $N(A)$ a $\dim N(A) = 1$.

B. Pokud chceme určit obor hodnot $H(A)$, musíme určit takové $y \in R^3$, že existuje

$$x \in R^3 \text{ a } A(x) = y.$$

Vezměme tedy libovolné $y = [y_1, y_2, y_3] \in R^3$. Ptáme se, zda-li se dá tento vektor vyjádřit jako lineární kombinace obrazů vektorů báze, pro které máme předepsáno zobrazení A .

$$[y_1, y_2, y_3] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$$

$$[y_1, y_2, y_3] = [\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3]$$

Odtud dostáváme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých se 3 parametry $y_1, y_2, y_3 \in R$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = y_1$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = y_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = y_3$$

kteřou řešíme Gaussovou eliminační metodou

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 2 & 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & 1 & y_3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_3 - y_1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ -r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & -1 & 1 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array} \right)$$

Z poslední matice je zřejmé, že soustava má řešení pouze je-li $y_3 - y_2 + y_1 = 0$. Pro

takové vektory existuje řešení $\alpha_3 = t, \alpha_2 = 2y_1 - y_2 + t, \alpha_1 = -y_1 + y_2 - t, \forall t \in R$. Potom platí, že

$$[y_1, y_2, y_3] = \alpha_1[1,2,1] + \alpha_2[1,1,0] + \alpha_3[0,1,1]$$

$$A(x) = \alpha_1 A([1,1,0]) + \alpha_2 A([0,1,1]) + \alpha_3 A([1,0,1]) = A(\alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1])$$

Odtud dostáváme, že pro vektory $y = [y_1, y_2, y_3] \in R^3$ takové, že $y_3 - y_2 + y_1 = 0$ existují vzory

$$x = \alpha_1[1,1,0] + \alpha_2[0,1,1] + \alpha_3[1,0,1] = (-y_1 + y_2 - t)[1,1,0] + (2y_1 - y_2 + t)[0,1,1] + t[1,0,1] =$$

$$= [-y_1 + y_2, y_1, 2y_1 - y_2 + 2t], \forall t \in R.$$

Obor hodnot má tedy tvar

$$H(A) = \{[y_1, y_2, y_3] \in R^3 : y_3 - y_2 + y_1 = 0\} = \{[y_1, y_2, -y_1 + y_2] \in R^3 : \forall y_1, y_2 \in R\} =$$

$$= \{y_1[1,0,-1] + y_2[0,1,1] : \forall y_1, y_2 \in R\} = \langle [1,0,-1], [0,1,1] \rangle.$$

Z posledního je patrné, že vektory $[1,0,-1], [0,1,1]$ tvoří bázi $H(A)$ a tudíž $\dim H(A) = 2$. ♦

Maticе lineárního zobrazení

Definice:

Nechť $A \in L(U, V)$ a necht' $E = (e_1, \dots, e_m)$ je báze U a $F = (f_1, \dots, f_n)$ je báze V . Maticí lineárního zobrazení A rozumíme matici

$$[A]_{E,F} = \left[[A(e_1)]_F, \dots, [A(e_m)]_F \right]$$

kde souřadnicové vektory $[A(e_i)]_F$ uvažujeme jako sloupcové.

Věta:

Nechť $A \in L(U, V)$ a necht' $E = (e_1, \dots, e_m)$ je báze U a $F = (f_1, \dots, f_n)$ je báze V . Pak platí

$$[A(u)]_F = [A]_{E,F} [u]_E, \forall u \in U.$$

Příklad:

Pro lineární zobrazení $D : P_3 \rightarrow P_2$ definované předpisem

$$D(p) = 2ax + b, \forall p \in P_3 : p(x) = ax^2 + bx + c$$

sestavte matici vzhledem k bázím $E = (e_1, e_2, e_3), e_1(x) = 1, e_2(x) = x, e_3(x) = x^2$ a

$F = (f_1, f_2), f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x - 1$. Nalezněte souřadnice obrazu mnohočlenu $p(x) = x^2 - 2x + 3$ vzhledem k bázi F .

Řešení:

Abychom mohli sestavit matici $[D]_{E,F} = \left[[D(e_1)]_F, [D(e_2)]_F, [D(e_3)]_F \right]$, musíme nejdříve určit obrazy vektorů báze E , tj. $D(e_1) = 0, D(e_2) = 1, D(e_3) = 2x$.

Dále musíme určit souřadnice těchto obrazů vzhledem k bázi F . Tzn. musíme řešit 3 rovnice

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = D(e_1),$$

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 = D(e_2),$$

$$\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2 = D(e_3).$$

Tyto 3 rovnice mají stejné levé strany a liší se pouze v pravých stranách. Proto rozepíšeme pouze první rovnici a ostatní budou analogické.

$$\alpha_1(x+1) + \alpha_2(x-1) = 0,$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x + (\alpha_1 - \alpha_2) = 0.$$

Toto vede na soustavu

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

Pro neznámé β a γ se pak změni pravé strany a tak můžeme řešit všechny 3 úlohy najednou pomocí Gauss-Jordanovy metody se 3 různými pravými stranami.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot (-\frac{1}{2}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 & \beta_1 = \frac{1}{2} & \gamma_1 = 1 \\ \alpha_2 = 0 & \beta_2 = -\frac{1}{2} & \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

Odtud

$$[D(e_1)]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [D(e_2)]_F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, [D(e_3)]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hledaná matice má tedy tvar

$$[D]_{E,F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud chceme určit souřadnice obrazu vektoru p vzhledem k bázi F , pak nejdříve vypočteme

$$\text{souřadnice } [p]_E = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ neboť } p = 3e_1 - 2e_2 + e_3. \text{ Pak}$$

$$[D(p)]_F = [D]_{E,F}[p]_E = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lehce se dá ověřit, že $D(p) = 2x - 2 = 0f + 2f_2$. ♦

Příklad:

Je dáno lineární zobrazení $D: P_3 \rightarrow P_2$ z předchozího příkladu. Určete takový vzor $p \in P_3$ aby $D(p) = x + 1$.

Řešení:

K řešení využijeme matici zobrazení D , kterou jsme sestavili v předchozím příkladě. Pro matici lineárního zobrazení totiž platí $[D(p)]_F = [D]_{E,F}[p]_E$, kde E je báze P_3 a F je báze P_2 .

Jelikož souřadnice obrazu $D(p) = x + 1$ vzhledem k bázi F jsou $[D(p)]_F = [1, 0]$ můžeme souřadnice $[p]_E = [x_1, x_2, x_3]$ hledaného mnohočlenu p vzhledem k bázi E určit ze soustavy lineárních rovnic $[D]_{E,F}[p]_E = [D(p)]_F$. Řešíme tedy Gaussovou eliminační metodou.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+r_1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jelikož u neznámé x_1 není vedoucí prvek volíme ji za parametr a tedy $x_1 = t, t \in R$. Dále dostáváme $x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}$. Souřadnice hledaného vzoru p vzhledem k bázi E jsou tedy

$[p]_E = [t, 1, \frac{1}{2}], \forall t \in R$. Hledaný vzor má tedy tvar

$$p(x) = te_1(x) + 1e_2(x) + \frac{1}{2}e_3(x) = t + x + \frac{1}{2}x^2, \forall t \in R. \quad \blacklozen$$