Kapitola:	**4 DETERMINANTY**

V následující kapitole bude definován determinant, budou uvedeny některé jeho vlastnosti a budou předvedeny metody výpočtu determinantů. Při studiu využijete řadu pojmů, které jste se naučili v předchozí kapitole věnované maticím. Uvidíte, že determinant lze interpretovat jako reálné číslo přiřazované čtvercovým maticím, odkud vyplývá těsná souvislost mezi maticemi a determinanty. Determinanty lze rovněž využít jako prostředek k řešení systémů lineárních rovnic. S tím se seznámíte v následující kapitole, která je věnována právě této problematice.

Modul:	**4.1 Pojem determinantu**

Cílem tohoto modulu je

- zavést pomocný pojem permutace množiny,
- definovat determinant,
- ukázat výpočet determinantu podle definice.

Učební jednotka:	**4.1.1 Definice determinantu**

Příklad 21.

Nechť množina $M = \{1,2,3\}$. Všechny její permutace jsou

$$K_1 = (1,2,3), K_2 = (1,2,3), K_3 = (2,1,3), K_4 = (2,3,1), K_5 = (3,1,2), K_6 = (3,2,1).$$

Počet prvků množiny M je počet všech jejích permutací je 3! = 3.2.1 = 6.

Úloha 29.

Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$. Určete

a) počet všech jejích permutací;

b) počet permutací, které mají na prvním místě písmeno a.

Řešení: a) 24; b) 6.

Úloha 30.

Určete počet všech sudých čtyřciferných čísel sestavených z cifer 1, 2, 3, 4.

Řešení: 12.

Úloha 31.

Určete počet inverzí v následujících permutacích množiny $M = \{1,2,3,4\}$ a rozhodněte, zda jsou sudé nebo liché:

a) $K = (1,2,3,4)$;

b) $K = (1,3,24)$;

c) $K = (4,1,2,3)$;

d) $K = (4,3,2,1)$.

Řešení: a) 0, sudá; b) 1, lichá; c) 3, lichá; d) 6, sudá.

Učební jednotka:	**4.1.2 Výpočet determinantů řádu n = 2 a n = 3**

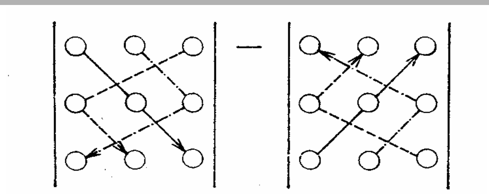
Úloha 32.

Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a+b & a+b \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & 3-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$.

Řešení: a) 19; b) 0; c) –4ab; d) –6.

Výpočet lze schematicky znázornit pomocí šipek, jak vidíte na následující kresbě.



Výpočet determinantu podle tohoto schématu se nazývá Sarrusovo pravidlo (původcem je francouzský matematik Pierre Fréderic Sarrus (1798-1858)).

Úloha 33.

Vypočtěte následující determinanty

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -1 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 0 & x & -x \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}; \quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ \sin y & 1 & \cos y \\ \sin z & 1 & \cos z \end{vmatrix}.$$

Řešení:

a) -7; b) -58; c) 0; d) 6; e) $x\text{-}x^2$; f) $\sin(x-z)+\sin(y-x)+\sin(z-y)$.

Úloha 34.

Určete všechna $x \in \mathbf{R}$, pro která platí

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} x & 2 \\ x^2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)}\ \begin{vmatrix} x-2 & x \\ 3 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 2x & -3 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} \geq 0; \quad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 2^{x-1} & 8^{-x} \\ 16 & 4^{2-x} \end{vmatrix} < 0;$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{f)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ \ln x & 2\ln x & 3\ln x \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení:

a) $x_1 = 0; x_2 = 2$; b) $x_1 = 4; x_2 = -1$; c) $x \in <1, \frac{3}{2}>$; d) $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$;

e) $x_1 = 2, x_2 = 3$; f) $x = 1$.

Příklad 22.

Determinanty řádu n = 1 a jejich hodnoty jsou např.

$$|2| = 2, \quad |-3| = -3, \quad |0| = 0, \quad |x-y| = x-y.$$

Přestože symbol determinantu je formálně stejný jako označení absolutní hodnoty reálného čísla, nesmíme oba pojmy ztotožňovat.

TEST 9

A. Teoretická část

1. Počet všech permutací množiny $M = \{1,2,...,n\}$ je roven $n! = n.(n-1)...3.2.1$. (ano-ne)

2. Determinanty jsou reálná čísla přiřazovaná čtvercovým maticím. (ano-ne)
3. Podle definice determinantu (UL, str. 54) lze teoreticky spočítat determinant libovolného řádu. (ano-ne)
4. V determinantu řádu n=4 může být člen $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$. (ano-ne)
5. V determinantu řádu n=4 může být $a_{12}a_{23}a_{34}a_{43}$. (ano-ne)
6. V determinantu řádu n=4 má člen $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ znaménko +. (ano-ne)
7. Neexistují determinanty řádu n=1. (ano-ne)
8. Sarrusovo pravidlo platí pro výpočet determinantu řádu n=3. (ano-ne)

B. Praktická část

1. Určete počet inverzí v uvedených permutacích množiny $M = \{1,2,3,4,5\}$.

   a) 2,4,1,3,5; b) 5,6,3,4,1,2.

   Zjistěte, která z uvedených permutací je sudá a která je lichá.

2. V lavici sedí 6 žáků. Určete,
   a) kolika způsoby je můžeme v lavici rozsadit;
   b) kolika způsoby je můžeme v lavici rozsadit, chtějí-li 2 sedět vedle sebe.
3. Vypočtěte determinanty řádu n=2:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{6}-1 \\ \sqrt{6}+1 & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix}.$$

4. Vypočtěte determinanty řádu n=3:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & -x & -x^2 \\ 1 & y & y^2 \end{vmatrix}.$$

5. Řešte rovnice:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 7x-6 & 6x-7 \\ x-1 & 1-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x-5 & 3 \\ \sqrt{x+5} & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} \log(1+x) & 1 \\ \log(1-x) & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad \text{d)} \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Správné odpovědi

A. 1. ano, 2. ano, 3. ano, 4. ano, 5. ne, 6. ano, 7. ne, 8. ano.

B. 1.a) 3; 1.b) 12; 2.a) 5!=120; 2.b) 2.4!=48; 3.a) 11; 3.b) 1; 3.c) –3;

4.a) 100; 4.b) 0; 4.c) $2xy(x-y)$; 5.a) $x_{1,2}=1$; 5.b) $x=20$; 5.c) $x=\frac{99}{101}$;

5.d) $x_{1,2}=\frac{1}{3}\left(2\pm\sqrt{7}\right)$.

Doporučené úlohy pro procvičování:

Sbírka úloh ***S1***, př. 14 - 17, 19.

Modul:	4.2 Vlastnosti determinantů

Cílem modulu je

- naučit se počítat determinanty rozvojem podle prvků vhodného řádku (sloupce),
- uvést některé vlastnosti determinantů zjednodušujících jejich výpočet,
- ukázat praktický způsob určování regulárnosti, příp. singulárnosti matic.

Učební jednotka:	4.2.1 Výpočet determinantu rozvojem

Tato metoda výpočtu determinantu se používá zejména pro determinanty řádů větších než tři, lze ji však použít i pro výpočet determinantů řádu n ≤ 3.

Příklad 23.

Mějme determinant $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Doplněk prvku $a_{11} = 3$ získáme vynecháním 1. řádku a 1. sloupce daného determinantu. Je tedy

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6.$$

Dále je např.

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11.$$

Algebraický doplněk určitého prvku vznikne z doplňku tohoto prvku tak, že jej opatříme znaménkem + nebo – podle toho, je-li součet řádkového a sloupcového indexu prvku sudý nebo lichý. Např.

$$A_{11}^* = (-1)^{1+1}.A_{11} = -6, \; A_{13}^* = (-1)^{1+3}.A_{13} = 17,$$
$$A_{22}^* = (-1)^{2+2}.A_{22} = 6, \; A_{23}^* = (-1)^{2+3}.A_{22} = -9.$$

Doplněk prvku a jeho algebraický doplněk se tedy liší pouze znaménkem.

Úloha 35.

V determinantu $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ určete $A_{11}, A_{11}^*, A_{23}, A_{23}^*, A_{33}, A_{33}^*$.

Řešení: Pro názornost neuvádíme.

Hodnota determinantu je rovna součtu součinů všech prvků i-tého řádku s jejich algebraickými doplňky.

Úloha 36.

Rozvojem podle 1. řádku vypočtěte determinanty

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Řešení: a) 0; b) –6.

Úloha 37.

Vypočtěte determinant z úlohy 15 rozvojem nejprve podle 2. řádku a potom podle 1. a 3. sloupce.

Úloha 38.

Vypočtěte determinanty rozvojem podle uvedených řad:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (1. sloupec, 2. sloupec); b) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (1. řádek, 3. řádek).

Řešení: a) –24; b) –98.

Na výpočtu determinantu v úloze 10.b) si uvědomte, že výpočet determinantu se zjednoduší, zvolíme-li si řadu obsahující nulové prvky.

Příklad 24.

Následující determinant jsme rozvinuli nejprve podle 5. řádku, vzniklý determinant 4. řádu podle 4. sloupce a poslední determinant 3. řádu podle 1. sloupce. Postupně jsme získali

$$\begin{vmatrix} a & 10 & 7 & 0 & -5 \\ 0 & b & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 15 & c & 0 & -3 \\ 3 & 7 & 8 & d & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} a & 10 & 7 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 15 & c & 0 \\ 3 & 7 & 8 & d \end{vmatrix} = ed \begin{vmatrix} a & 10 & 7 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 15 & c \end{vmatrix} = eda \begin{vmatrix} b & 0 \\ 15 & c \end{vmatrix} = abcde.$$

Úloha 39.

Rozvojem podle řady obsahující písmena vypočtěte determinanty

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};\ \text{c)}\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Řešení: a) –a+c; b) –3a-b-2c+d; c) 16a+33b+28c-45d.

Učební jednotka:	**4.2.2 Vlastnosti determinantů**

Příklad 25.

Uvažme determinanty

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 12 \end{vmatrix};\ \text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix};\ \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 7 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{9} & \frac{7}{6} \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix};\ \text{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\ \begin{vmatrix} 12 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix};\ \text{f)}\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 5 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Determinant ad a) je roven 0 podle důsledku věty 4.4 na str. 62. Determinant ad b) je roven nule podle věty 4.7 na str. 63 (1. a 3. sloupec jsou závislé). Podle téže věty je i determinant ad

c) roven 0 (3. řádek je 6-ti násobek 2. řádku). V determinantu ad d) je 3. řádek dvojnásobek 1. řádku a determinant je rovněž nulový. Determinant ad e) je roven 12(-1)7=-84 podle věty 4.8 na str. 65. Pro výpočet determinantu ad f) platí 2(-1)(-3)5=30 podle vět 4.3 a 4.8.

Úloha 40.

Určete hodnotu determinantu, aniž byste ji počítali, je-li

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 37 & 0 & 0 \\ 15 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 18 & 12 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení: a) –28; b) 1; c) –1200; d) 0; e) 0.

Viděli jste, že výpočet determinantu, jehož matice má trojúhelníkový tvar, je velmi pohodlný. Před výpočtem determinantu lze jeho matici uvést na trojúhelníkový a teprve potom determinant vypočítat.

Úloha 41.

Vypočtěte determinant tak, že jeho matici převedete nejprve na trojúhelníkový tvar, je-li

a) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Řešení: *a)* –35; b) –116; c) 0; d) –570 (nejprve vytkněte z druhého řádku 2 a z prvního řádku 5).

Na závěr této učební jednotky se vrátíme k pojmu regulární a singulární matice, který byl uveden ve 3. kapitole v učební jednotce 3.3.2. Věta 4.9 v ***LA*** na str. 67 uvádí, jak lze určit regulárnost, příp. singulárnost, matice pomocí hodnoty jejího determinantu. V příkladě 4.9 na str. 68 vidíte praktické použití věty.

TEST 10

A. Teoretická část

Vyberte správná tvrzení.

1. Determinant řádu n lze rozvinout
   a) podle libovolné řady;
   b) pouze podle některého řádku;
   c) pouze podle některého sloupce;
   d) pouze podle prvního sloupce.
2. V determinantu řádu n lze stanovit doplněk
   a) každého prvku;
   b) každého nenulového prvku;
   c) pouze prvků na hlavní diagonále.
3. Doplněk prvku a jeho algebraický doplněk
   se liší pouze znaménkem;
   a) jsou si v absolutní hodnotě rovny;
   b) jsou si rovny.
4. Pro doplněk A_{12} prvku a_{12} a jeho algebraický doplněk A_{12}^* platí
   a) $A_{12} = A_{12}^*$; b) $A_{12} = -A_{12}^*$.
5. Pro doplněk A_{31} prvku a_{31} a jeho algebraický doplněk A_{31}^* platí
   a) $A_{31} = A_{31}^*$; b) $A_{31} = -A_{31}^*$.
6. Nechť A je tvrzení „determinant je roven 0“, B je tvrzení „v determinantu jsou dvě řady stejné“. Správná implikace je
   a) $A \Rightarrow B$; b) $\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}$.
7. Determinant je roven 0, platí-li
   a) jedna řada je tvořena nulami;
   b) dvě řady jsou stejné;
   c) jedna řada je k-násobek jiné řady, s ní rovnoběžné;
   d) jedna řada je lineární kombinací ostatních s ní rovnoběžných řad.
8. Nechť **A** je čtvercová matice řádu n, k reálné číslo. Pro determinanty matic **A** a k.**A** platí
   a) det k.**A** = k.det **A**;
   b) det k.**A** = k^n det **A**.

B. Praktická část

1. Vypočtěte determinanty rozvojem podle uvedených řad.

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 7 & 17 & 12 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad (1.\,\text{sloupec}); \qquad \text{b)}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \quad (2.\ \text{řádek}).$$

2. Vypočtěte determinant rozvojem podle nejvhodnější řady, je-li

$$\text{a)}\begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 11 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & -7 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 22 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{c)}\begin{vmatrix} 6 & 1 & a & 1 \\ 8 & 1 & b & 7 \\ 3 & 7 & c & -1 \\ 2 & 1 & d & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Bez výpočtu stanovte determinant matice **A** a rozhodněte o její regulárnosti, je-li

$$\text{a)}\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}; \ \text{b)}\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \ \text{c)}\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}; \ \text{d)}\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & 3 & 18 \\ \frac{1}{6} & -4 & 7 \\ \frac{2}{3} & 5 & 28 \end{bmatrix}.$$

Správné odpovědi

A. 1.a); 2. a); 3.a), b); 5.a); 6.b); 7.a), b), c), d).

B. 1.a) 18; 1b) 100; 2.a) –1224; 2.b) –24; 2.c) –124a + 46b + 20c + 218d

3.a) det **A** = -7 regulární; 3.b) det **A** = 15 regulární; 3.c) det **A** = 0 singulární;

3.d) det A = 0 singulární.

Modul:	**4.3 Kondenzační metoda**

Cílem modulu je

- uvést další způsob výpočtu determinantů.

Učební jednotka:	**4.3.1 Kondenzační metoda výpočtu determinantů**

<u>Úloha 42.</u>

Vypočtěte následující determinanty kondenzační metodou:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -11 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix};\ \text{c)}\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};\ \text{d)}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix};\ \text{e)}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{f)}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -11 & 3 \end{vmatrix}.$$

Řešení: a) –58; b) 16; c) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$; d) –24; e) –4; f) 38.

TEST 11

1. Vypočtěte hodnotu následujících determinantů kondenzační metodou:

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix};\quad \text{c)}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};\quad \text{d)}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & 8 & -14 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1-y & 1 \\ 1 & 1-z & 1 & 1 \\ 1-t & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{f)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Správné odpovědi

1. a) –2; 1. b) –9; 1. c) 48; 1. d) 360; e) $xyz - xyt - xzt - yzt - xyzt$; f) 160.

CVIČENÍ 3

1. Vypočtěte determinanty řádu n = 3 pomocí Sarrusova pravidla.

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix};\quad \text{b)}\begin{vmatrix} a & y & y \\ y & b & y \\ y & y & c \end{vmatrix}.$$

2. Řešte rovnice

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2^{3x-4} & 8^{-x} \\ 16 & 4^{5-x} \end{vmatrix} = 0; \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

3. Vypočtěte determinant řádu n = 4 rozvojem podle uvedené řady, je-li

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\ (1.\,\text{řádek}); \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & a \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{vmatrix}\ (4.\,\text{sloupec}).$$

4. Vypočtěte determinant kondenzační metodou, je-li

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}; \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 8 & 3 & 12 \end{vmatrix}; \qquad \text{d)}\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Je dána čtvercová matice **D** řádu n = 4 pro jejíž determinant platí det **D** = 4. Určete

a) zda je **D** regulární;

b) hodnost h(**D**) matice **D**;

c) det $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$;

d) det 3**D**.

DODATKY KE KAPITOLE 4

Klíčová slova

Determinant, řádek a sloupec determinantu, hlavní a vedlejší diagonála determinantu, řád determinantu, Sarrusovo pravidlo, rozvoj determinantu podle zvolené řady, kondenzační metoda výpočtu determinantu.

Doporučená literatura pro hlubší studium

DOLANSKÝ, P. a kol. *Matematika pro distanční studium.* 1. vyd. Plzeň: ZUČ, 2000, 196 s., ISBN 80-7082-643-6, strany 50-60.