

Cvičení č. 11

Klasifikace kvadratických forem. Diagonální tvar matice kvadratické formy. Kongruence a Choleského rozklad.

Klasifikace kvadratických forem**Definice:**

Kvadratická forma Q na vektorovém prostoru V se nazývá *pozitivně definitní* jestliže $\forall x \in V, x \neq 0$ platí $Q(x) > 0$. Je-li $\forall x \in V Q(x) \geq 0$ pak se forma Q nazývá *pozitivně semidefinitní*. Je-li $-Q$ pozitivně definitní resp. semidefinitní pak se Q nazývá *negativně definitní* resp. *semidefinitní*. Pokud nesplňuje ani jedno z výše uvedených kritérií nazývá se *indefinitní*.

Příklad:

Klasifikujte kvadratickou formu Q na R^3 definovanou předpisem

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2.$$

Řešení:

Předpis kvadratické formy upravíme doplňováním na kvadráty součtů:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2^2 + 2x_2(-2x_3) + 4x_3^2) + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Z posledního tvaru je zřejmé, že $Q(x) > 0, \forall x \in R^3, x \neq 0$ neboť součet nenulových druhých mocnin je vždy kladný. Q je tedy pozitivně definitní. ♦

Diagonální tvar matice kvadratické formy.

Diagonálním tvarem matice kvadratické formy rozumíme nalezení takové báze, vzhledem k níž je matice kvadratické formy diagonální.

Věta:

Nechť Q je kvadratická forma na V a necht' E je báze pro níž $[Q]_E$ je diagonální matice. Jsou-li všechny její diagonální prvky kladné resp. nezáporné pak je Q pozitivně definitní resp. semidefinitní. Jsou-li záporné resp. nekladné pak je Q negativně definitní resp. semidefinitní.

Příklad:

Určete bázi v níž má kvadratická forma z předchozího příkladu diagonální matici.

Řešení:

V předchozím příkladu jsme dospěli ke tvaru $Q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2$.

Pokud si uvědomíme, že $x = [x]_S = [x_1, x_2, x_3]^T$, kde S je standardní báze R^3 a označíme-li

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow [x]_E = T[x]_S$$

kde $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a $[x]_E = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ jsou souřadnice vektoru x vzhledem k nějaké bázi

$E = (e_1, e_2, e_3)$. Matice T se obvykle nazývá matice přechodu od standardní báze S k nové bázi E . Vše uvedenou substitucí dostáváme kvadratickou formu ve tvaru

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Tento tvar můžeme dále upravit

$$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = [x]_E^T [Q]_E [x]_E$$

Odtud je patrné, že v bázi E má matice kvadratické formy

$$[Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonální tvar a jelikož všechny její diagonální prvky jsou kladné je kvadratická forma Q pozitivně definitní.

Zbývá tedy určit tuto bázi. Jelikož $[x]_E = T[x]_S$ a T je regulární můžeme taktéž psát

$[x]_S = T^{-1}[x]_E$. Dosadíme-li za x postupně všechny vektory báze $E = (e_1, e_2, e_3)$ dostaneme

$$e_i = [e_i]_S = T^{-1}[e_i]_E = T^{-1}s_i^I = s_i^{T^{-1}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Vypočteme tedy nejdříve matici T^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + 2r_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odtud

$E = (e_1, e_2, e_3)$ je tedy hledaná báze v níž má kvadratická forma Q diagonální matici.

Snadno to můžeme ověřit sestavením matice Q pro bázi E . Budeme tedy dosazovat do symetrické bilineární formy $B_S(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$, která přísluší kvadratické formě Q jak bylo ukázáno ve cvičení č. 10.

$$B_S(e_1, e_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

$$B_S(e_1, e_2) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0 = B_S(e_2, e_1)$$

$$B_S(e_1, e_3) = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = B_S(e_3, e_1)$$

$$B_S(e_2, e_2) = (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

$$B_S(e_2, e_3) = (-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = B_S(e_3, e_2)$$

$$B_S(e_3, e_3) = (-2) \cdot (-2) + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Odtud sestavíme matici kvadratické formy vzhledem k bázi E ve tvaru

$$[B_S]_E = [Q]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Báze E je tedy opravdu bází ve které má matice kvadratické formy diagonální tvar.



Poznámka:

Vzhledem k tomu, že $[x]_E = T[x]_S$ jak jsme ukázali v předchozím příkladě, můžeme dosazením upravit

$$Q(x) = [x]_E^T [Q]_E [x]_E = [x]_S^T T^T [Q]_E T [x]_S = [x]_S^T [Q]_S [x]_S.$$

Odtud dostáváme $[Q]_S = T^T [Q]_E T$ nebo $[Q]_E = (T^T)^{-1} [Q]_S T^{-1}$.

Kongruentní matice a elementární kongruence

Definice:

Matice A a B se nazývají kongruentní jestliže existuje regulární matice R tak, že $A = RBR^T$.

Věta:

Je-li A reálná symetrická matice pak existuje regulární matice R tak, že $D = RAR^T$, kde D je diagonální matice.

Poznámka:

Matici R z předchozí věty můžeme nalézt pomocí tzv. *elementárních kongruencí*. Elementární kongruencí rozumíme elementární řádkovou operaci, která je bezprostředně následována stejnou sloupcovou úpravou. Elementární kongruenci můžeme zapsat v maticovém tvaru

$B = TAT^T$, kde B je matice obdržaná z matice A elementární kongruencí a T je matice elementární řádkové úpravy. Postupným upravováním matice elementárními kongruencemi podobně jako v případě dopředné redukce u Gaussovy eliminace můžeme převést libovolnou matici na diagonální matici. Pak $D = T_k \dots T_1 A T_1^T \dots T_k^T = RAR^T$, kde T_1, \dots, T_k jsou matice jednotlivých elementárních řádkových úprav a $R = T_k \dots T_1$.

Příklad:

Pomocí elementárních kongruencí převed'te matici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na diagonální tvar.

Řešení:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + r_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + s_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + r_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s_2$$

Pokud bychom chtěli určit i matici R pak bychom všechny elementární řádkové úpravy zapisovali do jednotkové matice, kterou bychom přidali za matici A podobně jako v případě LU rozkladu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Pak hledanou maticí je matice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a diagonální matici získáme aplikací sloupcových úprav

$$D = (RA)R^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \blacklozenge$$

Poznámka:

Pomocí kongruencí můžeme taktéž určit diagonální tvar matice kvadratické formy a

klasifikovat je. Jelikož $[Q]_E = (T^T)^{-1}[Q]_S T^{-1}$ a jelikož můžeme nalézt matici R tak, že $R[Q]_S R^T = D = [Q]_E$ získáme matici kvadratické formy v diagonálním tvaru a můžeme identifikovat matici $T^{-1} = R^T$ jejíž sloupce tvoří vektory báze E jak již bylo popsáno na počátku.

Příklad:

Určete bázi, ve které má kvadratická forma Q na R^3 definovaná předpisem

$$Q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

diagonální tvar a formu klasifikujte.

Řešení:

Nejprve nalezneme matici kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi. Tedy budeme dosazovat postupně vektory standardní báze do symetrické části příslušné bilineární formy

$$B_S(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2 + 5x_3y_3$$

$$B_S(s_1^I, s_1^I) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1$$

$$B_S(s_1^I, s_2^I) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 1 = B_S(s_2^I, s_1^I)$$

$$B_S(s_1^I, s_3^I) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = 0 = B_S(s_3^I, s_1^I)$$

$$B_S(s_2^I, s_2^I) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \cdot 0 = 2$$

$$B_S(s_2^I, s_3^I) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \cdot 1 = -2 = B_S(s_3^I, s_2^I)$$

$$B_S(s_3^I, s_3^I) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5$$

Matice kvadratické formy vzhledem ke standardní bázi má tedy tvar:

$$[Q]_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pomocí elementárních kongruencí nalezneme matic R a diagonální tvar kvadratické formy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) -r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) +2r_2$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = (RA)R^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [Q]_E$$

Bázi E určíme ze sloupců matice $T^{-1} = R^T$, t.j.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vzhledem k bázi $E = (e_1, e_2, e_3)$ má kvadratická forma Q diagonální matici

$$[Q]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a jelikož jsou všechny diagonální prvky kladné je forma pozitivně definitní. \blacklozenge

Poznámka:

Každou kvadratickou formu můžeme jednoznačně ztotožnit s její maticí a obdobně každá symetrická matice bude jednoznačně určovat nějakou kvadratickou formu. Z tohoto důvodu mluvíme o pozitivně resp. negativně definitní či semidefinitních maticích přičemž máme na mysli definitnost či semidefinitnost jejich kvadratických forem.

Choleského rozklad a řešení soustav s pozitivně definitní maticí

Věta:

Je-li A reálná pozitivně definitní matice pak existuje dolní trojúhelníková matice L a diagonální matice D tak, že $A = LDL^T$.

Poznámka:

Postup jak určit matici L je analogický postupu jak určit matici R pro kongruentní matice. Existuje totiž matice R tak, že $RAR^T = D$ a jelikož A je pozitivně definitní není potřeba zaměňovat řádky matice A ani přičítat násobky řádku s vyšším indexem k řádkům s indexem vyšším. Tím obdobně jako u LU rozkladu bude matice R dolní trojúhelníková. Označíme-li navíc $L = R^{-1}$ dostáváme $A = LDL^T$. Tento rozklad se taktéž nazývá *Choleského rozklad* matice A .

Příklad:

Nalezněte Choleského rozklad matice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Řešení:

Pomocí elementárních řádkových úprav nalezneme matici $(L^{-1}A)$ a L^{-1}

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 4 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) - r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot 15 \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -15 & 30 & 0 & 0 & 15 \end{array} \right) + r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -1 & 4 & 15 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}, \quad D = (L^{-1}A)L^{-T} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}.$$

Určíme ještě L

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) + r_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 15 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) - r_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{4} \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Řešením je tedy, že $A = LDL^T$, kde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Poznámka:

Choleského rozkladu se využívá k efektivnímu řešení soustav lineárních rovnic s pozitivně definitní maticí. Soustava $Ax = b$ se pak dá přepsat do tvaru $(LDL^T)x = b$ a obdobně jako

v případě LU rozkladu přezávorkovat $L(D(L^T x)) = b$. Pak se původní soustava dá řešit ve třech krocích:

1. $Lz = b$ tzv. dopředná substituce
2. $Dy = z$
3. $L^T x = y$ tzv. zpětná substituce

Příklad:

Choleského rozkladem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Řešení:

Matice soustavy a vektor pravých stran má tvar:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ohledně toho, že matice A je totožná s maticí v zadání předchozího příkladu a proto využijeme řešení předchozího příkladu kde jsme určili Choleského rozklad.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 390 \end{pmatrix}.$$

Hledání Choleského rozkladu bychom však mohli zkrátit o výpočet matice L neboť k řešení soustavy nám plně postačí i její inverze tedy

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}.$$

Nyní vlastní řešení:

1. Dopředná substituce $Lz = b$. Jelikož máme k dispozici L^{-1} můžeme ji vyřešit

$$z = L^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

součinem

2. $Dy = z$. Jelikož D je diagonální matice můžeme řešení určit triviálně:

$$\begin{aligned} 4y_1 &= 1 & y_1 &= \frac{1}{4} \\ 60y_2 &= -1 & \Leftrightarrow y_2 &= -\frac{1}{60} \\ 390y_3 &= -1 & y_3 &= -\frac{1}{390} \end{aligned} \quad \text{odtud } y = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{60} \\ -\frac{1}{390} \end{pmatrix}.$$

3. Zpětná substituce $L^T x = y$. Se znalostí L^{-1} řešíme opět jako součin

$$x = L^{-T} y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{60} \\ -\frac{1}{390} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{26} \\ -\frac{1}{13} \\ -\frac{1}{26} \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavu tedy je $x_1 = \frac{7}{26}, x_2 = -\frac{1}{13}, x_3 = -\frac{1}{26}$. ♦