

## Skalární součin, ortogonalizace

1. Je dán vektorový prostor  $\mathbb{R}^2$ . Rozhodněte, zda následující předpisy určují skalární součin  $(u, v)$ , přičemž  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ :
  - (a)  $(u, v) = 4u_1v_1 + 2u_1v_2 + 2u_2v_1 + 3u_2v_2$ ,
  - (b)  $(u, v) = 2u_1^2 + 4u_2^2 + 6u_3^2 - u_1v_2 - 2u_2v_3$ .
2. V  $\mathbb{R}^3$  je zadán skalární součin  $(x, y) = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3$ . Ortogonalizujte bázi  $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ , kde  $f_1 = (0, 0, 1)$ ,  $f_2 = (0, 1, 1)$ ,  $f_3 = (1, 2, 1)$  vzhledem k zadanému skalárnímu součinu.
3. Gram-Smidtovým procesem nalezněte ortonormální bázi lineárního obalu vektorů  $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ ,  $u_2 = (0, 1, -1, 0)$ ,  $u_3 = (1, 3, -1, 3)$  vzhledem ke skalárnímu součinu  $(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ .
4. Je dán vektorový prostor  $\mathbb{R}^3$  se skalárním součinem  $(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ . Vypočtěte souřadnice vektoru  $x = (3, 4, 5)$  vzhledem k ortogonální bázi

$$E = \left( (1, -1, 1), (1, 1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \right).$$

K výpočtu využijte ortogonalitu báze.

### Výsledky

1. a) ano, b) ne,
2.  $E = ((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0))$ ,
3.  $E = \left( \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{3}{2\sqrt{3}}\right) \right)$ ,
4.  $x = \left[\frac{4}{3}, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}\right]$ .