Kapitola:	**2 VEKTOROVÉ PROSTORY**

V této kapitole se seznámíte s pojmem vektorového prostoru a jeho vlastnostmi. Dalšími stěžejními pojmy kapitoly jsou lineární závislost a nezávislost vektorů, báze a dimenze vektorového prostoru, které jsou základem teorie o řešení soustav lineárních rovnic i jednotlivých metod řešení soustav lineárních rovnic (viz kapitola 5). Na rozdíl od následujících kapitol, kde se více „počítá“, má tato spíše teoretický charakter, i když i zde se objeví řada příkladů.

Modul:	**2.1 Pojem vektorového prostoru**

Cílem tohoto modulu je

- seznámit se s pojmem vektorového prostoru,
- uvědomit si zejména obecnost a šíři tohoto pojmu.

Učební jednotka:	**2.1.1 Pojem vektorového prostoru**

<u>Příklad 3.</u>

Uvažujme množinu všech bodů roviny spolu s pravoúhlou souřadnou soustavou. Víme, že každý bod **a** roviny je jednoznačně určen svými souřadnicemi a_1, a_2. Zaveďme operaci sčítání bodů $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vztahem $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ a operaci násobení bodu **a** reálným číslem r vztahem $r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2)$. Ověřme platnost axiomů A1-A8 z definice vektorového prostoru:

$A1:$ $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1, b_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$

$$A2: \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (a_1, a_2) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2) = (a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2 + c_2) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) + (c_1, c_2) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}.$$

$A3:$ Pro bod $\mathbf{o} = (0,0)$ platí $(\mathbf{a} + \mathbf{o}) = (a_1 + 0, a_2 + 0) = \mathbf{a}.$

$A4$: K bodu $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ existuje bod $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2)$ s vlastností

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (a_1 - a_1, a_2 - a_2) = (0,0) = \mathbf{o}.$$

$A5:$ $1\,\mathbf{a} = 1(a_1, a_2) = (a_1, a_2) = \mathbf{a}.$

$A6:$Pro reálná čísla r,s platí

$$r(s\mathbf{a}) = r(sa_1, sa_2) = (rsa_1, rsa_2) = rs(a_1, a_2) = rs\mathbf{a}.$$

*A*7: Pro reálná čísla r,s platí

$$(r+s)\mathbf{a} = [(r+s)a_1, (r+s)a_2] = (ra_1 + sa_1, ra_2 + sa_2) = (ra_1, ra_2) + (sa_1, sa_2) = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}.$$

*A*8: Pro reálná číslo r platí

$$r(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = r(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = [r(a_1 + b_1), r(a_2 + b_2)] = (ra_1 + rb_1, ra_2 + rb_2) = \\ = (\mathrm{ra}_1, ra_2) + (rb_1, rb_2) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}.$$

Vzhledem k malému rozsahu modulu 2.1 je test SAA spojen s testem SAA uvedeným za modulem 2.2.

Modul:	**2.2 Aritmetický vektorový prostor**

Cílem tohoto modulu je

- pochopit pojem aritmetického vektorového prostoru,
- zopakovat si základní početní operace s aritmetickými vektory.

Učební jednotka:	**2.2.1 Aritmetický vektorový prostor**

Příklad 4.

Jsou dány aritmetické vektory $\mathbf{a} = (3,-1,5), \mathbf{b} = (5,-1,6), \mathbf{c} = (4,-2,0)$.

a) Vektor $\mathbf{b}$ dominuje vektor $\mathbf{a}$, neboť platí $b_1 > a_1, b_2 = a_2, b_3 > a_3$, je tedy $\mathbf{b} \geq \mathbf{a}$. Mezi vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{c}$ není žádný vztah dominování, neboť $c_1 > a_1$, ale $c_2 < a_2 (c_3 < a_3)$. Vektor $\mathbf{b}$ pak ostře dominuje vektor $\mathbf{c}$, neboť platí $b_i > c_i$ pro i = 1,2,3.

b) Pro zadané vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je třeba vypočítat souřadnice vektoru $4\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Postupujeme takto:

$$4\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = 4(3,-1,5) - 3(5,-1,6) + (4,-2,0) = (12,-4,20) + (-15,3,-18) + (4,-2,0) = \\ = (12 - 15 + 4, -4 + 3 - 2, 20 - 18 + 0) = (1,-3,2).$$

Úloha 3.

Jsou dány aritmetické vektory $\mathbf{a} = (4,-2,3,-1), \mathbf{b} = (5,0,4,-2), \mathbf{c} = (1,-1,3,-3), \mathbf{d} = (5,-2,4,0)$.

Zapište všechny platné vztahy dominování mezi těmito čtyřmi vektory.

Řešení: $\mathbf{d} \geq \mathbf{a}, \mathbf{b} > \mathbf{c}$.

<u>Úloha 4.</u>

Pro aritmetické vektory $\mathbf{a} = (-1,7,4)$, $\mathbf{b} = (6,0,3)$, $\mathbf{c} = (-1,4,-3)$ určete:

a) opačné vektory $-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c}$,

b) vektor $3\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c}$.

Řešení:

a) $-\mathbf{a} = (1,-7,-4), -\mathbf{b} = (-6,0,-3), -\mathbf{c} = (1,-4,3)$,

b) $3\mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{c} = (18,-3,2)$.

TEST 2

A. Teoretická část

Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá či nepravdivá.

1. Vektor $-\mathbf{a}$ se nazývá opačný k vektoru $\mathbf{a}$.
2. Ve vektorovém prostoru je zavedena operace násobení vektorů.
3. Množina všech přirozených čísel s obvyklou operací sčítání a s operací reálného násobku tvoří vektorový prostor.
4. Množina všech celých čísel s obvyklou operací sčítání a s operací reálného násobku tvoří vektorový prostor.
5. Množina všech reálných čísel s obvyklou operací sčítání a s operací reálného násobku tvoří vektorový prostor.
6. Každý vektor $\mathbf{a}$ dominuje nulový vektor $\mathbf{o}$.
7. Aritmetický vektorový prostor je vždy vektorovým prostorem.
8. Pro aritmetické vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vždy platí $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.
9. Pro aritmetické vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vždy platí $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.
10. Pro reálné číslo r a aritmetický vektor $\mathbf{a}$ vždy platí $r\mathbf{a} = \mathbf{a}r$.

B. Praktická část

1. Pro vektory $\mathbf{a} = (4,7,-2,5), \mathbf{b} = (3,6,-1,0)$ určete

a) vektor $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

b) opačný vektor k vektoru $\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

c) vektor $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}$.

2. K vektorům $\mathbf{a}=(3,1,5), \mathbf{b}=(4,2,5)$ určete

a) vektor $\mathbf{c}$ s vlastností $\mathbf{c}<\mathbf{a}, \mathbf{c}<\mathbf{b}$;

b) vektor $\mathbf{d}$ s vlastností $\mathbf{a}<\mathbf{d}, \mathbf{b}<\mathbf{d}$;

c) vektor $\mathbf{e}$ s vlastností $\mathbf{a}<\mathbf{e}, \mathbf{e}<\mathbf{b}$.

Správné odpovědi

A. 1. ano; 2. ne; 3. ne; 4. ne; 5. ano ; 6. ne; 7. ano ; 8. ano; 9. ne; 10. ano.

B. 1. a) $\mathbf{a}-\mathbf{b}=(1,1,-1,5)$; b) $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(-1,-1,1,-5)$; c) $3\mathbf{a}-4\mathbf{b}=(0,-3,-2,15)$.

3. a) např. $(0,0,0)$; b) např. $(5,3,6)$; c) neexistuje.

Modul:	**2.3 Podprostor vektorového prostoru**

Cílem tohoto modulu je

- seznámit se s pojmem podprostoru vektorového prostoru,
- pochopit pojem lineární kombinace vektorů.

Učební jednotka:	**2.3.1 Pojem podprostoru vektorového prostoru**

Příklad 5.

Ve vektorovém prostoru V_2 (viz příklad 4 a modul 2.2) uvažujme množinu všech vektorů tvaru $\mathbf{a}=(a_1,0)$ a označme ji W_2. Pro libovolné dva vektory

$$\mathbf{a},\mathbf{b}\in W_2 \text{ patří vektor } \mathbf{a}+\mathbf{b}=(a_1,0)+(b_1,0)=(a_1+b_1,0)$$

opět do množiny W_2, tedy tato množina je uzavřená vzhledem k operaci sčítání vektorů. Pro libovolné reálné číslo r a vektor $\mathbf{a}\in W_2$ patří podobně vektor $r\mathbf{a}=r(a_1,0)=(ra_1,0)$ do množiny W_2 je uzavřená vzhledem k operaci reálného násobku. Množina W_2 je tedy podprostorem vektorového prostoru V_2.

Učební jednotka:	**2.3.2 Lineární kombinace vektorů**

Příklad 6.

Lineárním obalem dvojice vektorů (1,0), (0,1) je celý vektorový prostor V_2, neboť každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in V_2$ je možno psát ve tvaru $\mathbf{a} = a_1(1,0) + a_2(0,1)$. Vektory (1,0), (0,1) jsou množinou generátorů vektorového prostoru V_2.

Úloha 5.

Najděte koeficienty lineární kombinace $\mathbf{z} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}$ pro vektory $\mathbf{x} = (5,3)$, $\mathbf{y} = (4,1)$, $\mathbf{z} = (1,2)$.

Řešení: $c_1 = 1,\ c_2 = -1$.

TEST 3

A. Teoretická část

Rozhodněte, zda následující tvrzení jsou pravdivá či nepravdivá.

1. Podprostor vektorového prostoru je uzavřená množina vzhledem k operaci sčítání vektorů.
2. Podprostor vektorového prostoru je uzavřená množina vzhledem k operaci násobení vektorů.
3. Triviální vektorový prostor je prázdná množina.
4. Neexistuje žádný vektorový prostor mající konečný počet prvků.
5. Lineární kombinace dvou vektorů je opět vektor.
6. Každý netriviální vektorový prostor je svým podprostorem.
7. Každý netriviální vektorový prostor má množinu generátorů.
8. Každý netriviální vektorový prostor má více množin generátorů.
9. Vektory (1,0), (0,1) jsou generátory V_2.

10. Lineární obal $[\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k]$ není podprostor vektorového prostoru.

B. Praktická část

1. Pro vektory $\mathbf{a}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{b}, \mathbf{c}$.

a) $\mathbf{a} = (4,2), \mathbf{b} = (1,3), \mathbf{c} = (2,-4)$

b) $\mathbf{a} = (4,2), \mathbf{b} = (1,3), \mathbf{c} = (2,6)$

2. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru *V*. Rozhodněte, které z uvedených skupin vektorů tvoří opět množinu generátorů *V*.

a) $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$;

b) $3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, -\mathbf{c}$;

c) $\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

d) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}$;

e) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$;

f) $3\mathbf{a}, 4\mathbf{b}, \mathbf{c}, 3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Správné odpovědi

A. 1. ano; 2. ne ; 3. ne; 4. ne; 5. ano; 6. ano; 7. ano; 8. ano; 9. ano; 10. ne.

B. 1. a) je; 1. b) není; 2. a) tvoří; b) tvoří; c) netvoří; d) netvoří; e) tvoří; f) tvoří.

Modul:	**2.4 Lineární závislost a nezávislost vektorů**

Cílem tohoto modulu je

- pochopit podstatu pojmů lineární závislosti a nezávislosti vektorů,
- naučit se rozlišovat, která skupina vektorů je lineárně závislá a která lineárně nezávislá.

Učební jednotka:	**2.4.1 Lineární závislost a nezávislost vektorů**

Příklad 7.

Máme rozhodnout, zda vektory $\mathbf{a} = (3,-7), \mathbf{b} = (-1,6)$ jsou lineárně nezávislé. Poznamenejme, že se v podstatě jedná o stejnou úlohu jako v předchozím modulu, kdy jsme se tázali, zda daný vektor je lineární kombinací jiných vektorů. Podle definice lineární závislosti chceme nyní zjistit, zda vektor $\mathbf{o}$ je netriviální lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, tedy zda rovnice

$$\mathbf{o} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$$

může být splněna i jiným způsobem než $c_1 = 0 = c_2$. Rovnici $(0,0) = c_1(3,-7) + c_2(-1,6)$ převedeme na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3c_1 - c_2 &= 0 \\ -7c_1 + 6c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Použijeme-li libovolnou ze středoškolských metod řešení soustav rovnic, zjistíme, že jediné řešení této soustavy je $c_1 = 0, c_2 = 0$. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Úloha 6.

Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a} = (3,-1,6)$, $\mathbf{b} = (-1,-3,3)$, $\mathbf{c} = (4,2,3)$.

Řešení: Jsou lineárně závislé, neboť platí $\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} = \mathbf{o}$.

Modul:	**2.5 Báze a dimenze vektorového prostoru**

Cílem tohoto modulu je

- pochopit význam a smysl pojmů báze a dimenze vektorového prostoru,
- uvědomit si souvislosti s pojmy probranými dříve v této kapitole.

Učební jednotka:	**2.5.1 Báze vektorového prostoru**

Příklad 8.

Při určování toho, zda daná skupina vektorů nějakého vektorového prostoru je bází tohoto prostoru, řešíme vlastně dvě protichůdné otázky. Jednak zjišťujeme, zda tato skupina vektorů je množinou generátorů vektorového prostoru, tj. zda je těchto vektorů „dostatečně mnoho“ a jednak zkoumáme, zda tyto vektory jsou lineárně nezávislé, tj. zda jich není „příliš mnoho“.

Tak např. vektory $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$ netvoří bázi vektorového prostoru V_3, protože žádný vektor $\mathbf{c}$, jehož souřadnice $c_3 \neq 0$ není těmito vektory generován. Stejně tak netvoří bázi V_3 vektory $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$, $\mathbf{c} = (0,0,1)$, $\mathbf{d} = (3,5,7)$. Jsou totiž lineárně závislé, neboť platí $3\mathbf{a} + 5\mathbf{b} + 7\mathbf{c} = \mathbf{d}$. Ani vektory $\mathbf{a} = (3,-1,6)$, $\mathbf{b} = (-1,-3,3)$, $\mathbf{c} = (4,2,3)$ netvoří bázi. Z úlohy 2.5 víme, že jsou lineárně závislé.

Úloha 7.

a) Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a} = (2,0)$, $\mathbf{b} = (0,3)$ tvoří bázi V_2.

b) Je to jediná báze V_2?

Řešení: a) Tvoří. b) Ne, bází V_2 je jakákoliv dvojice lineárně nezávislých vektorů.

Učební jednotka:	**2.5.2 Dimenze vektorového prostoru**

Příklad 9.

Navážeme-li na úvahy vedené v příkladě 2.7, můžeme nyní konstatovat, že dva vektory nemohou tvořit nikdy bázi vektorového prostoru V_3, stejně tak jako čtyři vektory nejsou nikdy bází V_3. Bázi ve V_3 může tvořit pouze skupina tří vektorů, musí však být lineárně nezávislá.

***TEST* 4**

A. Teoretická část

Rozhodněte o pravdivosti či nepravdivosti následujících tvrzení.

1. Je-li jeden ze skupiny vektorů lineární kombinací jiných, jsou tyto vektory lineárně nezávislé.
2. Je-li nulový vektor lineární kombinací skupiny vektorů, jsou tyto vektory lineárně závislé.
3. Skupina vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislá.
4. Vektory $\mathbf{a}, -\mathbf{a}$ jsou lineárně závislé.
5. Jediný nenulový vektor je lineárně nezávislý.
6. Množina generátorů vektorového prostoru je vždy jeho bází.
7. Každý vektor báze je lineární kombinací ostatních vektorů báze.

8. Některý vektor báze je lineární kombinací ostatních vektorů báze.
9. Dimenze vektorového prostoru je roven počtu prvků báze.
10. Dimenze triviálního vektorového prostoru je rovna 1.

B. Praktická část

1. Rozhodněte, zda jsou vektory $\mathbf{a} = (-1,4)$, $\mathbf{b} = (2,8)$ lineárně nezávislé.
2. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{a} = (0,0,1)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$, $\mathbf{c} = (1,0,0)$ jsou lineárně nezávislé.
3. Určete číslo k tak, aby vektory $\mathbf{a} = (7,4,3)$, $\mathbf{b} = (3,1,-2)$, $\mathbf{c} = (1,2,k)$ byly lineárně závislé.

Správné odpovědi

A. 1. ne; 2. ne; 3. ano; 4. ano; 5. ano; 6. ne; 7. ne; 8. ne; 9. ano; 10. ne.

B. 1. Nejsou; 2. Jsou; 3. $k = 7$.

CVIČENÍ 1

1. Zapište všechny platné vztahy dominování mezi vektory
$$\mathbf{a} = (8,5,-1,2),\ \mathbf{b} = (7,5,-2,4),\ \mathbf{c} = (7,4,-2,1),\ \mathbf{d} = (6,4,-2,3).$$
2. Pro vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ z předchozí úlohy vypočtěte vektory
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 3\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}, \\ \mathbf{w} &= \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 3\mathbf{c} - \mathbf{d}, \\ \mathbf{z} &= 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 3(\mathbf{d} - \mathbf{c}). \end{aligned}$$
3. Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{a} = (2,-1,4)$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{b} = (1,0,3), \mathbf{c} = (-1,4,2)$.
4. Určete koeficienty c_1, c_2 lineární kombinace
$$\mathbf{z} = c_1\mathbf{x} + c_2\mathbf{y}\text{, je-li } \mathbf{x} = (-4,1),\ \mathbf{y} = (1,3), \mathbf{z} = (-3,2).$$
5. Rozhodněte, zda vektory $\mathbf{x} = (-3,1)$ a $\mathbf{y} = (4,-1)$ tvoří množinu generátorů vektorového prostoru V_2.
6. Jsou vektory $\mathbf{a} = (3,8,0)$, $\mathbf{b} = (-4,2,7), \mathbf{c} = (5,1,5)$ lineárně nezávislé?
7. Určete číslo k tak, aby vektory $\mathbf{a} = (7,-11,9)$, $\mathbf{b} = (-14,k,-18)$ byly lineárně závislé.
8. Z vektorů $\mathbf{a} = (-1,2)$, $\mathbf{b} = (-4,2)$, $\mathbf{d} = (2,-1)$ vyberte všechny dvojice lineárně nezávislých vektorů.

9. Tvoří vektory $\mathbf{a} = (1,0,3)$, $\mathbf{b} = (3,1,0)$, $\mathbf{c} = (0,3,1)$ bázi vektorového prostoru V_3?

10. Jaká je dimenze vektorového prostoru generovaného vektory $\mathbf{a} = (3,-1,4)$, $\mathbf{b} = (6,-2,-8)$?

DODATKY KE KAPITOLE 2

Klíčová slova

Vektorový prostor, vektor, souřadnice vektoru, aritmetický vektor, podprostor vektorového prostoru, lineární kombinace, lineární obal, množina generátorů, lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze.