12. Determinanty

Determinanty

1. Induktivní definice determinantu
2. Determinant a antisymetrické formy
3. Výpočet hodnoty determinantu
4. Determinant součinu matic
5. Rozvoj determinantu podle prvků libovolného řádku
6. Adjungovaná a inverzní matice
7. Determinant transponované matice
8. Determinant jako funkce sloupců
9. Cramerovy vzorce pro řešení soustav

12.1 Induktivní definice determinantu

Budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}$$

Úpravami, které nepoužívají dělení, dostaneme

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \underset{a_{22}\mathrm{r}_1 - a_{12}\mathrm{r}_2}{\longmapsto} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \underset{a_{11}\mathrm{r}_2 - a_{21}\mathrm{r}_1}{\longmapsto} \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}b_2 - b_1a_{21} \end{array}\right]$$

odkud pro $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ dostaneme

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

12.1 Induktivní definice determinantu

Nyní si všimněme, že čitatele i jmenovatele lze vyjádřit pomocí *jedné* funkce matice:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Řešení soustavy lze zapsat za pomocí tohoto označení ve tvaru

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{d}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{d}$$

kde

$$d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Tyto vzorce se dají zobecnit na řešení soustav n rovnic o n neznámých.

12.1 Induktivní definice determinantu

DEFINICE 1
Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, nechť $\mathrm{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ značí matici, která vznikne vyškrtnutím jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Matice $\mathrm{M}_{ij}^{\mathbf{A}}$ se nazývá *minor* matice **A** příslušný k dvojici indexů (i, j).

PŘÍKLAD 1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_{12}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

12.1 Induktivní definice determinantu

DEFINICE 2

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n s reálnými nebo komplexními prvky. *Determinant matice* **A** je číslo, které značíme $\det \mathbf{A}$ nebo $|\mathbf{A}|$ a vypočteme jej podle následujících pravidel:

D1 Je-li $n = 1$, pak $\det \mathbf{A} = \det [a_{11}] = a_{11}$.

D2 Předpokládejme, že $n > 1$ a že umíme určit determinant libovolné čtvercové matice řádu $n - 1$. Pak

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \left|\mathbf{M}_{11}^{\mathbf{A}}\right| - a_{12} \left|\mathbf{M}_{12}^{\mathbf{A}}\right| + a_{13} \left|\mathbf{M}_{13}^{\mathbf{A}}\right| - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \left|\mathbf{M}_{1n}^{\mathbf{A}}\right|$$

Determinant matice je tedy funkce *prvků* matice, která je definována explicitně pro $n = 1$ a pro $n > 1$ je definována pomocí pravidla, které definuje determinant matice řádu n pomocí determinantů řádu $n - 1$.

12.1 Induktivní definice determinantu

PŘÍKLAD 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\left(-1|1| - 2|2|\right) - 2\left(1|1| - 2| - 1|\right) + 3\left(1|2| - (-1)| - 1|\right) =$$

$$= 1 \cdot -5 - 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -8.$$

PŘÍKLAD 3

$$\begin{vmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = l_{11} \begin{vmatrix} l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{vmatrix} = \dots = l_{11} \cdots l_{nn}.$$

Odtud speciálně plyne $\det \mathbf{I} = 1$.

12.1 Induktivní definice determinantu

Definujme *algebraický doplněk* matice **A** příslušný k dvojici indexů (i, j) předpisem

$$\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\mathbf{M}_{ij}^{\mathbf{A}}\right| .$$

Vzorec **D2** lze pak přepsat ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = a_{11}\mathbf{A}_{11} + \cdots + a_{1n}\mathbf{A}_{1n}.$$

Determinant matice n-tého řádu počítaný podle pravidla **D2** vyžaduje vyčíslení součtu n součinů čísel a determinantů matic řádu $n-1$. Použijeme-li pravidlo **D2** na determinanty řádu $n-1$, dostaneme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje vyčíslení součtu $n(n-1)$ součinů dvou čísel a determinantů řádu $n-2$. Opakováním tohoto postupu zjistíme, že vyčíslení determinantu matice n-tého řádu vyžaduje $n!$ sčítanců tvořených součiny n čísel, tj. celkem $(n-1)n!$ součinů.

Existují efektivnější postupy výpočtu determinantů.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

LEMMA 1 Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ a $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ jsou čtvercové matice, které se liší nanejvýš v prvním řádku, a α je libovolný skalár. Pak

$$\begin{vmatrix} \alpha\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A}, \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ:

$$\begin{vmatrix} \alpha\mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha a_1 \mathbf{A}_1 + \dots + \alpha a_n \mathbf{A}_n = \alpha \det \mathbf{A}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11} + b_{11})\mathbf{A}_{11} + \dots + (a_{1n} + b_{1n})\mathbf{A}_{1n} =$$

$$= (a_1\mathbf{A}_1 + \dots + a_n\mathbf{A}_n) + (b_1\mathbf{A}_1 + \dots + b_n\mathbf{A}_n) = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

12.2 Determinant a antisymetrické formy

LEMMA 2 Nechť **A**=$[a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$. Pak

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix}.$$

DŮKAZ: Pro $n = 2$ platí

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}) = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \end{vmatrix}.$$

Důkaz pro obecnější případ se provede rozepsáním determinantů minorů v **D2** a vhodnou úpravou. Úplný důkaz je však komplikovaný.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

VĚTA 1

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n \geq 2$, nechť $i < j$ a nechť $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ je matice, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ vzájemnou výměnou i-tého a j-tého řádku. Pak

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_j^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_i^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{matrix} = - \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ: Důkaz se provádí pomocí matematické indukce s využitím Lemma 2. Viz literatura.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

VĚTA 2

Nechť **A** a **B** jsou čtvercové matice, které mají stejné řádky s výjimkou k-tého. Pak pro libovolné α platí

$$k\begin{vmatrix} * \\ \alpha\mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} = \alpha \det \mathbf{A}, \quad k\begin{vmatrix} * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} \\ * \end{vmatrix} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ: Důkaz se provádí pomocí matematické indukce s využitím Lemma 1 a Věty 2. Viz literatura.

Věty 1. a 2. můžeme shrnout tvrzením, že *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice řádků matice*.

12.2 Determinant a antisymetrické formy

DŮSLEDEK:

Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice:

1. Má-li $\mathbf{A}$ dva stejné řádky, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
2. Má-li $\mathbf{A}$ nulový řádek, pak $\det \mathbf{A} = 0$.
3. Je-li $\mathbf{B}$ čtvercová matice, která má stejné řádky jako $\mathbf{A}$ s výjimkou k-tého, a

$$\mathbf{r}_k^{\mathbf{B}} = \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{r}_l^{\mathbf{A}}, \quad k \neq l,$$

   pak $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$.
4. Jsou-li řádky $\mathbf{A}$ lineárně závislé, pak $\det \mathbf{A} = 0$.

12.3 Výpočet hodnoty determinantu

Elementární řádkové úpravy ovlivňují velmi jednoduše hodnotu determinantu.

1. Přičtení násobku některého řádku k jinému hodnotu determinantu nezmění
2. Vzájemná výměna dvou řádků změní znaménko determinantu
3. Vynásobení řádku skalárem vynásobí tímto skalárem determinant

Elementární řádkové úpravy matice proto můžeme využít k převodu matice na speciální tvar vhodný pro výpočet determinantu. Pro nás je to prozatím dolní trojúhelníková matice, jejíž determinant je podle příkladu 3 roven součinu diagonálních prvků.

12.3 Výpočet hodnoty determinantu

PŘÍKLAD 4

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +r_3 \\ 2r_3 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3r_2 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) \cdot 1 \cdot (-1) = 12$$

PŘÍKLAD 5

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ r_3 \\ r_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -r_3 \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -r_2 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-2) \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

12.4 Determinant součinu matic

VĚTA 3

Nechť $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou čtvercové matice řádu n. Pak

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

DŮKAZ: Předpokládejme nejprve, že $\mathbf{A}$ je diagonální, tedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}.$$

Pak

$$\det(\mathbf{AB}) = \begin{vmatrix} d_1 \mathbf{r}_1^{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ d_n \mathbf{r}_n^{\mathbf{B}} \end{vmatrix} = d_1 \cdots d_n \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}.$$

12.4 Determinant součinu matic

DŮKAZ *(Pokračování):* Je-li $\mathbf{A}$ libovolná matice, pak existuje posloupnost $\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_k$ sestávající z l elementárních permutačních matic $\mathbf{P}_{ij}$ a $k-l$ Gaussových transformací $\mathbf{G}_{ij}(\alpha)$, která splňuje

$$\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Jelikož násobení Gaussovou transformací realizuje přičtení některého řádku k jinému a násobení permutací realizuje výměnu řádků, platí

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{AB}) = (-1)^l \det(\mathbf{DB}) = \\ &= (-1)^l \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{B} = (-1)^l \det(\mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1 \mathbf{A}) \cdot \det \mathbf{B} = \\ &= (-1)^l (-1)^l \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \end{aligned}$$

12.5 Rozvoj determinantu podle libovolného řádku

VĚTA 4

Jestliže $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n > 1$, pak pro libovolný index k platí

$$\det \mathbf{A} = a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn}.$$

DŮKAZ: Pro libovolné k dostaneme postupnou výměnou původně k-tého řádku s řádkem bezprostředně nad ním

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_2^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} = \cdots = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_1^{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k-2}^{\mathbf{A}} \\ \mathbf{r}_{k-1}^{\mathbf{A}} \\ * \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ k \\ \end{matrix} =$$

$$= (-1)^{k-1}\left(a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| - a_{k2}|\mathbf{M}_{k2}^{\mathbf{A}}| + \cdots + (-1)^{n+1}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}|\right) =$$

$$= (-1)^{k+1}a_{k1}|\mathbf{M}_{k1}^{\mathbf{A}}| + \cdots + (-1)^{k+n}|\mathbf{M}_{kn}^{\mathbf{A}}| =$$

$$= a_{k1}\mathbf{A}_{k1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{kn}.$$

12.5 Rozvoj determinantu podle libovolného řádku

DŮSLEDEK:

Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu $n > 1$.

1. Jsou-li k, l dva různé indexy řádků matice $\mathbf{A}$, pak

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = 0.$$

2. Je-li $\mathbf{A}$ trojúhelníková matice, pak $\det \mathbf{A} = a_{11} \cdots a_{nn}$.

DŮKAZ:

1. Hodnota $\mathbf{A}_{li}$ vůbec nezávisí na l-tém řádku matice $\mathbf{A}$. Platí tedy

$$a_{k1}\mathbf{A}_{l1} + \cdots + a_{kn}\mathbf{A}_{ln} = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \\ \mathbf{r}_k^{\mathbf{A}} \\ * \end{array} \right| \end{array} \begin{array}{c} \\ k \\ \\ l \\ \\ \end{array} = 0.$$

2. Pro dolní trojúhelníkovou matici bylo tvrzení dokázáno v Příkladě 3. Pro horní trojúhelníkovou matici je důkaz analogický s tím, že využijeme rozvoj determinantu podle posledního řádku z Věty 4.

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

DEFINICE 3
Nechť $\mathbf{A}$ je libovolná čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak *adjungovaná matice* $\widetilde{\mathbf{A}}$ k matici $\mathbf{A}$ je čtvercová matice stejného řádu definovaná předpisem

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \dots & \mathbf{A}_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{1n} & \dots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix}.$$

PŘÍKLAD 6 Pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{je} \quad \widetilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

PŘÍKLAD 6 *Pokračování*

Opravdu

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathbf{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-6) = 8,$$

$$\mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{A}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3,$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3-3 = -6, \quad \mathbf{A}_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \mathbf{A}_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

VĚTA 5

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice řádu $n > 1$. Pak $\det \mathbf{A} \neq 0$ a

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}}.$$

DŮKAZ: Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová regulární matice, pak existuje posloupnost elementárních řádkových operací, která převede $\mathbf{A}$ na jednotkovou matici $\mathbf{I}$. Jelikož determinant matice upravené elementární transformace se může od determinantu původní matice lišit jen nenulovým násobkem a $\det \mathbf{I} = 1$, platí $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Nyní si povšimněme, že rozvoje determinantu podle libovolných řádků můžeme zapsat maticově pomocí adjungované matice ve tvaru

$$\mathbf{A}\widetilde{\mathbf{A}} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}.$$

Odtud

$$\mathbf{A} \left(\frac{1}{\det \mathbf{A}} \widetilde{\mathbf{A}} \right) = \mathbf{I}.$$

12.6 Adjungovaná a inverzní matice

PŘÍKLAD 7 Pro matici $\mathbf{A}$ definovanou v Příkladu 6 dostaneme

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 8 & -6 & -4 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

DŮSLEDEK:

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$.

DŮKAZ:

Je-li $\mathbf{A}$ singulární, pak má závislé sloupce, takže podle důsledku 4 vět 1 a 2 platí $\det \mathbf{A} = 0$. Obrácené tvrzení plyne z právě dokázané věty.

12.7 Determinant transponované matice

VĚTA 6

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Pak $\det \mathbf{A}^\top = \det \mathbf{A}$.

DŮKAZ: Každou permutační matici **P** vyjádřit ve tvaru $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \cdots \mathbf{P}_k$ součinu elementárních permutačních matic $\mathbf{P}_i$, které jsou symetrické, takže $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}_k \cdots \mathbf{P}_1$ a

$$\det \mathbf{P}^\top = |\mathbf{P}_k| \cdots |\mathbf{P}_1| = \det \mathbf{P}.$$

Jelikož transponování nemění diagonálu matice a determinant trojúhelníkové matice je roven součinu jejích diagonálních prvků, platí tvrzení také pro každou trojúhelníkovou matici.

Jestliže je **A** obecná čtvercová matice, pak podle věty o **LUP** rozkladu existují dolní trojúhelníková matice **L**, horní trojúhelníková matice **U** a permutační matice **P** tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{LUP}$.

S použitím věty o součinu determinantů odtud plyne

$$\det \mathbf{A}^\top = \det(\mathbf{P}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{L}^\top) = |\mathbf{P}^\top||\mathbf{U}^\top||\mathbf{L}^\top| = |\mathbf{L}||\mathbf{U}||\mathbf{P}| = \det(\mathbf{LUP}) = \det \mathbf{A}.$$

12.8 Determinant jako funkce sloupců

Ze Věty 6 vyplývá, že determinant považovaný za funkci sloupců má stejné vlastnosti jako determinant považovaný za funkci řádků. Například *determinant je antisymetrická bilineární forma libovolné dvojice sloupců matice*.

VĚTA 7

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro $i = 1, \ldots, n$ platí

$$\det \mathbf{A} = a_{1i}\mathbf{A}_{1i} + \cdots + a_{ni}\mathbf{A}_{ni}.$$

DŮKAZ:

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1i} & \ldots & a_{ni} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1}a_{1i}|\mathbf{M}_{1i}^\top| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{ni}|\mathbf{M}_{ni}^\top| = (-1)^{i+1}a_{1i}|\mathbf{M}_{1i}| + \ldots$$

$$\cdots + (-1)^{i+n}a_{ni}|\mathbf{M}_{ni}| = a_{1i}\mathbf{A}_{1i} + \cdots + a_{ni}\mathbf{A}_{ni}.$$

12.9 Cramerovy vzorce

Použijeme-li vzorec pro inverzní matici k řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulární čtvercovou maticí **A** řádu $n > 1$, dostaneme pro složky x_i řešení **x** vzorce

$$x_i = \left[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\right]_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(\mathbf{A}_{1i}b_1 + \cdots + \mathbf{A}_{ni}b_n).$$

Minory příslušné k prvkům i-tého sloupce neobsahují prvky i-tého sloupce, a proto můžeme výraz v kulaté závorce považovat za rozvoj determinantu podle i-tého sloupce matice

$$\mathbf{A}_i^{\mathbf{b}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} * & \mathbf{b} & * \end{array}\right] \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{\mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}} & & \phantom{\mathbf{s}_{i-1}^{\mathbf{A}}} & i & \phantom{\mathbf{s}_{i+1}^{\mathbf{A}}} & & \phantom{\mathbf{s}_n^{\mathbf{A}}} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_{i-1}^{\mathbf{A}} & \mathbf{b} & \mathbf{s}_{i+1}^{\mathbf{A}} & \dots & \mathbf{s}_n^{\mathbf{A}} \end{array}\right] \end{array},$$

která vznikne z **A** záměnou i-tého sloupce za **b**. Výrazy

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i^{\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \qquad i = 1, \dots, n$$

se nazývají *Cramerovy vzorce*.

12.9 Cramerovy vzorce

PŘÍKLAD 8 Pomocí Cramerových vzorců najděte řešení soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Postupně vypočteme determinant matice soustavy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12$$

a čitatele Cramerových vzorců

$$|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 12, |\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 48, |\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Odtud

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 1, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = 4, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3^{\mathbf{b}}|}{\det \mathbf{A}} = -1.$$