

---

# **2. Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic**

# Úpravy a řešení soustav lineárních rovnic

---

1. Soustava lineárních rovnic
2. Ekvivalentní úpravy
3. Maticový zápis
4. Úprava na schodový tvar
5. Zpětná substituce
6. Gaussova eliminace
7. Gauss-Jordanova metoda
8. Pracnost řešení

# 2.1 Soustava lineárních rovnic

## DEFINICE 1

Soustavou  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, \dots, x_n$  nazýváme množinu rovnic ve tvaru:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \dots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \quad (S)$$

Čísla  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  nazýváme koeficienty soustavy a  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  nazýváme pravé strany.

# 2.1 Soustava lineárních rovnic

---

**PŘÍKLAD 1** Soustava z úvodního příkladu II:

$$\begin{array}{rcccccc} 2u_1 & -u_2 & & & & = & 0.2683 \\ -u_1 & +2u_2 & -u_3 & & & = & 0.2683 \\ & -u_2 & +2u_3 & -u_4 & & = & 0.2683 \\ & & -u_3 & +2u_4 & -u_5 & = & 0.2683 \\ & & & -u_4 & +2u_5 & = & 0.2683 \end{array}$$

Jedná se o soustavu 5 rovnic o 5 neznámých  $u_1, \dots, u_5$ , kde

$$\begin{array}{l} a_{11} = 2, \quad a_{12} = -1, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{15} = 0, \quad b_1 = 0.2683 \\ a_{21} = -1, \quad a_{22} = 2, \quad a_{23} = -1, \quad a_{24} = 0, \quad a_{25} = 0, \quad b_2 = 0.2683 \\ a_{31} = 0, \quad a_{32} = -1, \quad a_{33} = 2, \quad a_{34} = -1, \quad a_{35} = 0, \quad b_3 = 0.2683 \\ a_{41} = 0, \quad a_{42} = 0, \quad a_{43} = -1, \quad a_{44} = 2, \quad a_{45} = -1, \quad b_4 = 0.2683 \\ a_{51} = 0, \quad a_{52} = 0, \quad a_{53} = 0, \quad a_{54} = -1, \quad a_{55} = 2, \quad b_5 = 0.2683 \end{array}$$

## 2.2 Ekvivalentní úpravy

---

Základní myšlenka řešení soustavy lineárních rovnic spočívá v nahrazení dané soustavy jinou soustavou, která má stejné řešení a je jednodušší.

### **DEFINICE 2**

*Ekvivalentními úpravami* soustavy lineárních rovnic nazýváme následující úpravy:

- E1** Vzájemná výměna libovolných dvou rovnic soustavy,
- E2** Násobení obou stran některé rovnice soustavy nenulovým číslem,
- E3** Přičtení násobku některé rovnice soustavy k jiné rovnici.

## 2.2 Ekvivalentní úpravy

---

Ekvivalentní úpravy mají tu vlastnost, že jejich pomocí můžeme z upravené soustavy získat zpět původní soustavu.

- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  vzájemnou výměnou  $i$ -té a  $j$ -té rovnice podle pravidla E1, pak tatáž úprava použitá na  $S'$  nás přivede zpět k  $S$ .
- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  násobením  $i$ -tého řádku nenulovým číslem  $\alpha$  podle pravidla E2, pak násobením téhož řádku soustavy  $S'$  číslem  $\frac{1}{\alpha}$  obdržíme zpátky soustavu  $S$ .
- Jestliže soustava  $S'$  vznikla ze soustavy  $S$  přičtením  $\alpha$ -násobku  $i$ -té rovnice k  $j$ -té rovnici ( $i \neq j$ ), pak přičtení  $(-\alpha)$ -násobku  $i$ -té rovnice soustavy  $S'$  k  $j$ -té rovnici soustavy  $S'$  vede opět k  $S$ .

## 2.2 Ekvivalentní úpravy

Dvě soustavy lineárních rovnic nazýváme *ekvivalentní soustavy*, jestliže jednu z nich lze získat z druhé ekvivalentními úpravami.

### VĚTA 1

Jsou-li dvě soustavy lineárních rovnic ekvivalentní, potom mají stejné řešení.

### PŘÍKLAD 2

$$-2x_1 + x_2 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 - 3x_2 = -10 \quad (2)$$

Vhodná úprava soustavy je například vynásobení (2) dvěma, podle pravidla **E2**, a přičtení (1) k upravené (2), v souladu s pravidlem **E3**. Upravená soustava bude mít tvar

$$-2x_1 + x_2 = 0 \quad (3)$$

$$-5x_2 = -20 \quad (4)$$

Z rovnice (4) vypočteme  $x_2 = 4$  a po dosazení do rovnice (3) dostaneme  $-2x_1 + 4 = 0$  odkud  $x_1 = 2$ .

## 2.3 Maticový zápis

---

Soustavu ( $S$ ) bude úsporně zapisovat do tabulky

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right],$$

kterou nazýváme *rozšířená matice soustavy* ( $S$ ). Matici  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

nazýváme *maticí soustavy* ( $S$ ) a *pravou stranou soustavy* ( $S$ ).

Pokud vektor  $\mathbf{x}$  má za složky neznámé  $x_1, \dots, x_n$  můžeme soustavu zapsat v maticové podobě  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .



## 2.3 Maticový zápis

---

Ekvivalentním úpravám soustavy rovnic odpovídají operace s řádky rozšířené matice soustavy, které nazýváme *elementární (řádkové) operace*:

- (e1) Vzájemná výměna libovolných dvou řádků.
- (e2) Násobení některého řádku nenulovým číslem.
- (e3) Přičtení násobku některého řádku k jinému řádku.

Máme-li dvě matice, z nichž jedna vznikla z druhé pomocí elementárních řádkových operací, říkáme, že matice jsou *řádkově ekvivalentní*.

## 2.3 Maticový zápis

---

### VĚTA 2

Mají-li dvě soustavy lineárních rovnic řádkově ekvivalentní rozšířené matice, potom mají stejné řešení.

**PŘÍKLAD 3** Úpravu soustavy (1),(2) na (3),(4) můžeme zapsat pomocí elementárních operací ve tvaru

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -10 \end{array} \right] \cdot 2 \mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -20 \end{array} \right] +r_1 \mapsto \left[ \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -20 \end{array} \right]$$

## 2.4 Úprava na schodový tvar

### DEFINICE 3

Budeme říkat, že matice je ve *schodovém tvaru*, jestliže má první nenulové prvky řádků zvané *vedoucí prvky* uspořádaný jako schody klesající zleva doprava. Požaduje se přitom, aby vedoucí prvky nebyly nad sebou a aby všechny případné nulové řádky byly dole.

### PŘÍKLAD 3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Úprava na schodový tvar

---

Pomocí elementárních řádkových operací můžeme převést lib. matici na schodový tvar.

Je-li v matici soustavy  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  prvek  $a_{ij}$  nenulový, pak vynásobíme-li  $i$ -tý řádek této matice číslem  $-a_{kj}/a_{ij}$  a přičteme-li ho ke  $k$ -tému řádku, bude mít upravená matice v  $k$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci prvek

$$a_{kj} + (-a_{kj}/a_{ij}) a_{ij} = 0.$$

Pokud je prvek  $a_{11}$  nenulový, lze takto transformovat matici  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  na tvar

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^1 & \dots & a_{mn}^1 & b_m^1 \end{array} \right]$$

## 2.4 Úprava na schodový tvar

Pokud bude také prvek  $a_{22}^1$  nenulový, můžeme obdobně dosáhnout pomocí elementárních řádkových operací, aby i pod ním byly v upravené matici nuly.

Bude-li pokaždé  $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ , dostaneme nakonec matici ve schodovém tvaru (nebo též v tzv. *trojúhelníkovém tvaru*) s nenulovými prvky  $a_{11}, a_{22}^1, \dots, a_{kk}^{k-1}$ .

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Pokud  $a_{ii}^{i-1} = 0$  a je možno nalézt prvek  $a_{ji}^{i-1} \neq 0, j > i$ , stačí vzájemně vyměnit před úpravou  $i$ -tý a  $j$ -tý řádek. V opačném případě dostaneme obecnější schodový tvar.

## 2.4 Úprava na schodový tvar

**POZOR!** Neprovádíme-li postupné úpravy na upravené matici, můžeme se dopustit chyby. Například úpravami

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -r_3 \\ -r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ +r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

nedostaneme rozšířenou matici soustavy ekvivalentní s původní maticí soustavy. Této chybě se můžeme vyhnout tak, že zvolíme jeden řádek, který neupravujeme, ale použijeme ho k úpravě ostatních. Například úpravy následující úpravy jsou již ekvivalentní.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

## 2.5 Zpětná substituce

Uvažujme, že rozšířená matice soustavy je ve schodovém tvaru

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

1. Jestliže poslední nenulový řádek rozšířené matice soustavy má nenulový pouze poslední prvek  $b_{k+1}^k$ , pak tomuto řádku odpovídá rovnice

$$0 = b_{k+1}^k,$$

která nemá pro  $b_{k+1}^k \neq 0$  řešení. V tomto případě tedy daná *soustava nemá řešení*.

## 2.5 Zpětná substituce

---

### PŘÍKLAD 4 *Soustava nemá řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 0 &= -3 \end{aligned}$$

Poslední rovnici  $0 = -3$  nelze splnit pro žádnou volbu  $x_1, x_2, x_3$  a soustava tudíž nemá řešení.



## 2.5 Zpětná substituce

Uvažujme, že rozšířená matice soustavy je ve schodovém tvaru

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \mapsto \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{n-1} & b_n^{n-1} \end{array} \right]$$

2. Jestliže  $k = n$ ,  $b_{n+1}^n = 0$  a  $a_{ii}^{i-1} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pak  $n$ -tá rovnice má tvar

$$a_{nn}^{n-1} x_n = b_n^{n-1},$$

ze které snadno vypočteme  $x_n$ . Po dosazení do předchozích rovnic zbude v  $(n - 1)$ -ní rovnici opět jediná neznámá. Budeme-li takto postupovat dále, určíme *jediné řešení soustavy*.

## 2.5 Zpětná substituce

---

**PŘÍKLAD 5** *Soustava má jediné řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_2 - x_3 & = & 2 \\ x_3 & = & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - (-3) & = & 1 \\ x_2 - (-3) & = & 2 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & = & -2 \\ x_2 & = & -1 \end{array} \Rightarrow x_1 + 2(-1) = -2 \Rightarrow x_1 = 0$$

Soustava má jediné řešení  $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -3$ .

## 2.5 Zpětná substituce

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2k}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{kk}^{k-1} & \dots & a_{kn}^{k-1} & b_k^{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

3. Jestliže rozšířená matice má obecný schodový tvar, pak z každé rovnice soustavy vyjádříme neznámou, která odpovídá vedoucímu prvku. Postupným dosazováním od posledního řádku dostaneme vzorce pro neznámé odpovídající vedoucím prvkům vyjádřené pomocí neznámých na pravé straně. V tomto případě má soustava *nekonečně mnoho řešení*.

## 2.5 Zpětná substituce

**PŘÍKLAD 6** *Soustava má nekonečně mnoho řešení*

Rozšířená matice soustavy byla elementárními řádkovými operacemi převedena na schodový tvar:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tato rozšířená matice soustavy odpovídá soustavě:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 1 \\ & x_3 - x_4 & = 2 \\ & 0 & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ & x_3 & = 2 + x_4 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 - x_2 + (2 + x_4) - x_4 = 3 - x_2$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení  $x_1 = 3 - x_2$ ,  $x_3 = 2 + x_4$   
přižemž  $x_2, x_4$  volíme libovolně.

## 2.6 Gaussova eliminace

Gaussova eliminační metoda:

1. *dopředná redukce*, tj. redukce na schodový tvar
2. *zpětná substituce*, tj. řešení soustavy se schodovou maticí

**PŘÍKLAD 7** *Soustava, která nemá řešení.*

Řešme soustavu

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\4x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= -1\end{aligned}$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \cdot 2 - r_1 \\ -2r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -r_2 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right]$$

Poslední rovnici  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -5$  nelze splnit žádnou volbou

$x_1, x_2, x_3$ . Soustava proto nemá řešení.

## 2.6 Gaussova eliminace

**PŘÍKLAD 8** *Soustava s jediným řešením.*

Řešme soustavu

$$\begin{aligned}2x_2 + 3x_3 &= 2 \\x_2 + x_3 &= 0 \\x_1 + x_3 &= 4\end{aligned}$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_3 \\ \updownarrow \\ r_1 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] -2r_2 \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Řešením rovnic dostaneme postupně

$$\begin{aligned}x_3 &= 2 \\x_2 &= -x_3 = -2 \\x_1 &= 4 - x_3 = 2\end{aligned}$$

což je jediné řešení naší soustavy.

## 2.6 Gaussova eliminace

---

**PŘÍKLAD 9** *Soustava, která má nekonečně mnoho řešení.*

Řešme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

Ekvivalentními řádkovými úpravami dostaneme postupně

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{+r_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Poslední matice je rozšířenou maticí soustavy

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0$$

$$0 = 0$$

## 2.6 Gaussova eliminace

---

### PŘÍKLAD 9 *Pokračování*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (1)$$

$$-x_2 - 2x_3 = 0 \quad (2)$$

$$0 = 0 \quad (3)$$

Z rovnice (2) vypočteme  $x_2$  pomocí  $x_3$ , tj.  $x_2 = -2x_3$ . Po dosazení za  $x_2$  do rovnice (1) dostaneme  $x_1 = 1 + x_3$ .

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení ve tvaru  $x_3$  *libovolné*,  $x_2 = -2x_3$ ,  $x_1 = 1 + x_3$ . Můžeme je zapsat také pomocí libovolného parametru  $p$  ve tvaru  $x_3 = p$ ,  $x_2 = -2p$ ,  $x_1 = 1 + p$ .

**Poznámka:** Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, je *množina* řešení určena jednoznačně, nikoliv však její *parametrizace*.

Například  $x_2 = p$ ,  $x_3 = -\frac{1}{2}p$  a  $x_1 = -\frac{1}{2}p + 1$  je *jiný* tvar *téhož* řešení.



## 2.7 Gauss-Jordanova metoda

---

### DEFINICE 4

Budeme říkat, že matice je v *normovaném schodovém tvaru*, jestliže je v takovém schodovém tvaru, že všechny prvky nad vedoucími prvky jsou nulové a navíc vedoucí prvky jsou rovny jedné.

Gauss–Jordanova metoda:

1. *dopředná redukce*, tj. redukce na schodový tvar
2. úprava na normovaný schodový tvar
  - (a) dělení řádků matice vedoucími prvky
  - (b) nulování prvků nad vedoucími prvky pomocí elementárních řádkových operací (e1),(e2) a (e3)

## 2.7 Gauss-Jordanova metoda

---

**PŘÍKLAD 10** Například dodatečnou úpravou rozšířené matice soustavy z příkladu 8 dostaneme

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_3 \\ -r_3 \end{array} \mapsto \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Řešení soustavy se nachází v posledním sloupci matice vpravo, neboť rovnice, které odpovídají rozšířené matici soustavy napravo, jsou  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -2$  a  $x_3 = 2$

## 2.8 Pracnost řešení

---

- Gaussova eliminace je velmi efektivní pro ruční řešení malých soustav a pro počítačové řešení soustav stovek až tisíců rovnic.
- Metoda je velmi efektivní i pro počítačové řešení větších soustav se speciální strukturou rozložení nenulových prvků.
- Pro rozsáhlejší soustavy existují efektivnější metody, které se rozvíjejí i v současné době.
- Gaussova eliminace není vhodná pro paralelní počítačovou implementaci.

Pracnost řešení soustavy metodou Gaussovy eliminace ( $m = n$ ):

1. Dopředná redukce:  $\frac{1}{6}(2n + 1)(n + 1)n$  násobení, tj. cca  $\frac{1}{3}n^3$  pro velká  $n$
2. Zpětná substituce:  $\frac{1}{2}n(n - 1)$  násobení, tj. cca  $\frac{1}{2}n^2$  pro velká  $n$ .