4. Trojúhelníkový rozklad

Trojúhelníkový rozklad

1. Permutační matice
2. Trojúhelníkové matice
3. Trojúhelníkový (LU) rozklad
4. Výpočet LU rozkladu
5. Řešení soustav pomocí LU rozkladu
6. Použití LU rozkladu

4.1 Permutační matice

DEFINICE 1
Matice **P** se nazývá *permutační matice*, je-li možno **P** získat z jednotkové matice **I** stejného typu postupnou výměnou řádků.

Výměnu i-tého a j-tého řádku dané matice můžeme provést tak, že tuto matici vynásobíme zleva *elementární permutační maticí* $\mathbf{P}_{ij}$, je možno každou permutační matici **P** zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{I} = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1}.$$

4.1 Permutační matice

PŘÍKLAD 1

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \mathrm{r}_3 \\ \\ \mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \mathrm{r}_2 \\ \mathrm{r}_1 \\ \\ \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P},$$

takže **P** můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{13}\mathbf{I} = \mathbf{P}_{12}\mathbf{P}_{13}.$$

LEMMA 1 Pro libovolnou permutační matici **P** platí $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^\top$

DŮKAZ: Zřejmě platí $\mathbf{P}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}^\top$. Pak z $\mathbf{P}_{ij}^{-1} = \mathbf{P}_{ij}$ plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{P}^\top &= \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} (\mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1})^\top = \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{P}_{i_1 j_1}^\top \cdots \mathbf{P}_{i_k j_k}^\top \\ &= \mathbf{P}_{i_k j_k} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1} \mathbf{P}_{i_1 j_1} \cdots \mathbf{P}_{i_k j_k} = \mathbf{P}_{i_k j_k}^{-1} \cdots \mathbf{P}_{i_1 j_1}^{-1} \mathbf{P}_{i_1 j_1} \cdots \mathbf{P}_{i_k j_k} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

4.1 Permutační matice

Elementární permutační matice $\mathbf{P}_{ij}$ můžeme také použít k výměně i-tého a j-tého *sloupce*. K tomu stačí násobit maticí $\mathbf{P}_{ij}$ *zprava*.

PŘÍKLAD 2 Například vynásobíme-li matici $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ řádu 2 maticí $\mathbf{P}_{12}$ zprava, dostaneme

$$\mathbf{AP}_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{s}_2^{\mathbf{A}}, \mathbf{s}_1^{\mathbf{A}}\right].$$

K odvození obecného pravidla pro permutaci sloupců můžeme použít transponování.

4.2 Trojúhelníkové matice

DEFINICE 2
Čtvercová matice **L**(**U**) se nazývá *dolní* (*horní*) *trojúhelníková matice*, jestliže má nad (pod) diagonálou všechny prvky nulové. Pro prvky l_{ij} dané dolní trojúhelníkové matice **L** tedy platí $l_{ij} = 0$ pro $i < j$, zatímco pro prvky u_{ij} dané horní trojúhelníkové matice **U** platí $u_{ij} = 0$ pro $i > j$.

LEMMA 2 Součin dvou trojúhelníkových matic stejného typu je trojúhelníková matice téhož typu.

DŮKAZ: Jsou-li například $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ a $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ dvě dolní trojúhelníkové matice a $i < j$, pak

$$[\mathbf{LM}]_{ij} = l_{i1}m_{1j} + \cdots + l_{in}m_{nj} = l_{i1} \cdot 0 + \cdots + l_{ii} \cdot 0 + 0 \cdot m_{i\,i+1} + \cdots + 0 \cdot m_{in} = 0,$$

takže **LM** je také dolní trojúhelníková matice.

4.2 Trojúhelníkové matice

VĚTA 1

Nechť $\mathbf{L} = [l_{ij}]$ je čtvercová dolní trojúhelníková matice s nenulovými diagonálními prvky. Pak $\mathbf{L}$ je regulární a $\mathbf{L}^{-1}$ je dolní trojúhelníková matice.

DŮKAZ: Je-li $\mathbf{L}$ dolní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na diagonále, pak existují matice elementárních operací $\mathbf{T}_p = \mathbf{G}_{i_p j_p}(\alpha_p)$ s $i_p < j_p$, případně $\mathbf{T}_p = \mathbf{M}_{i_p}(l_{i_p i_p}^{-1})$ tak, že pro matici $\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$ platí

$$\mathbf{T}\big[\mathbf{L}|\mathbf{I}\big] = \big[\mathbf{I}|\mathbf{B}\big].$$

Porovnáním levých částí příslušných matic dostaneme $\mathbf{TL} = \mathbf{I}$. Odtud tedy platí $\mathbf{L} = \mathbf{T}^{-1}$, odkud dle definice inverzní matice je $\mathbf{LT} = \mathbf{I}$ a $\mathbf{T} = \mathbf{L}^{-1}$. Jelikož všechny matice $\mathbf{T}_i$ jsou dolní trojúhelníkové, je také matice

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdots \mathbf{T}_1$$

dolní trojúhelníková matice.

4.3 Trojúhelníkový (LU) rozklad

VĚTA 2
Nechť $\mathbf{A}$ je regulární čtvercová matice. Pak existuje dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L}$, horní trojúhelníková matice $\mathbf{U}$ a permutační matice $\mathbf{P}$ tak, že

$$\mathbf{AP} = \mathbf{LU}.$$

Matice $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ jsou regulární.

DŮKAZ: Nechť $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je čtvercová matice řádu n.

Z regulárnosti matice $\mathbf{A}$ plyne, že existuje i_1 tak, že $a_{1i_1} \neq 0$.

Takže $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{AP}_{1i_1}$ má v levém horním rohu nenulový prvek $\bar{a}_{11} = a_{1i_1}$.

4.3 Trojúhelníkový (LU) rozklad

DŮKAZ: *Pokračování*

První krok úpravy matice $\bar{\mathbf{A}}$, který známe z Gaussovy eliminace, můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{A} \mathbf{P}_{1i_1} = \mathbf{A}_1,$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} \\ 0 & a^1_{22} & \dots & a^1_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^1_{n2} & \dots & a^1_{nn} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{G}_{1n}(-\bar{a}_{n1}/\bar{a}_{11}) \cdots \mathbf{G}_{12}(-\bar{a}_{21}/\bar{a}_{11})$$

je dolní trojúhelníková matice, neboť je vyjádřena jako součin dolních trojúhelníkových matic.

4.3 Trojúhelníkový (LU) rozklad

DŮKAZ: *Pokračování*

Matice $\mathbf{A}_1$ je zřejmě součinem regulárních matic, takže je $\mathbf{A}_1$ také regulární a existuje $i_2 \geq 2$ tak, že $a^1_{2i_2} \neq 0$. Matice $\bar{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{P}_{2i_2}$ má tedy nenulový prvek $\bar{a}_{22}$ a stejný první sloupec jako matice $\mathbf{A}_1$.

Opakováním tohoto postupu dosáhneme toho, že

$$\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{U},$$

kde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a^{n-1}_{11} & a^{n-1}_{12} & \dots & a^{n-1}_{1n} \\ 0 & a^{n-1}_{22} & \dots & a^{n-1}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a^{n-1}_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{n-1}$$

a

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{1i_1} \cdots \mathbf{P}_{n-1\,i_{n-1}}, \quad \widetilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_{n-1} \cdots \mathbf{L}_1.$$

4.3 Trojúhelníkový (LU) rozklad

DŮKAZ: *Pokračování*

$\mathbf{P}$ je zřejmě permutační matice a $\widetilde{\mathbf{L}}$ je dolní trojúhelníková matice, neboť každá matice $\mathbf{L}_i$ je součinem dolních trojúhelníkových matic $\mathbf{G}_{ij}(-\bar{a}_{ji}^{i-1}/\bar{a}_{ii}^{i-1})$ s $i < j$. Přenásobíme-li rovnici $\widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{U}$ zleva maticí $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1}$, dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Matice $\mathbf{L}$ je regulární dolní trojúhelníková matice, neboť je inverzní k dolní trojúhelníkové matici $\widetilde{\mathbf{L}}$. Jelikož jsou matice $\mathbf{A}, \mathbf{P}, \widetilde{\mathbf{L}}$ regulární, je také matice $\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}\mathbf{P}$ regulární. □

Vyjádření matice ve tvaru součinu $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ se nazývá **LU** rozklad podle počátečních písmen anglických slov *Lower* (dolní) a *Upper* (horní). *Matice* **L**, **U** *a* **P** *nejsou určeny jednoznačně*.

4.4 Výpočet LU rozkladu

Dle důkazu předchozí věty lze LU rozklad matice A nalézt následovně:

1. Úprava $\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right] \mapsto \left[\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{L}}\right]$
   - Nesmíme přičítat násobky řádků s vyšším indexem k řádkům s indexem nižším.
   - Nesmíme vyměňovat řádky
   - Pokud to je nutné, můžeme vyměnit sloupce a tyto výměny budeme zaznamenávat stejnými úpravami jednotkové matice t.j. $\mathbf{I} \mapsto \mathbf{P}$, kde $\mathbf{P}$ je hledaná permutační matice.
2. Vypočteme $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1}$ úpravou $\left[\widetilde{\mathbf{L}}|\mathbf{I}\right] \mapsto \left[\mathbf{I}|\mathbf{L}\right]$.
   K této úpravě opět nesmíme použít elementární řádkové operace popsané v 1.

4.4 Výpočet LU rozkladu

PŘÍKLAD 3 Úprava $\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right] \mapsto \left[\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{L}}\right]$:

$$\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right] = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{rrr|rrr} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ s_3 \quad \longleftrightarrow \quad s_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot 2 + \mathrm{r}_1 \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot 3 + \mathrm{r}_2 \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{L}}\right]$$

Sledování výměn sloupců:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ s_3 \quad \leftrightarrow \quad s_1 \end{array} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

4.4 Výpočet LU rozkladu

PŘÍKLAD 3 *Pokračování*

Výpočet $\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1}$ úpravou $\left[\widetilde{\mathbf{L}}|\mathbf{I}\right] \mapsto \left[\mathbf{I}|\mathbf{L}\right]$:

$$\left[\widetilde{\mathbf{L}}|\mathbf{I}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\mathrm{r}_1 \\ -\mathrm{r}_1 \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{r}_2 \end{array} \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{array} \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\mathbf{I}|\mathbf{L}\right]$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Přímým výpočtem si můžeme ověřit, že platí $\mathbf{AP} = \mathbf{LU}$.

4.4 Výpočet LU rozkladu

Uvedený postup výpočtu LU rozkladu je spíše vhodný pro ruční výpočet. Pro počítačové nalezení LU rozkladu bychom využili následujících poznatků.

Předpokládejme, že provádíme úpravu $\left[\mathbf{A}|\mathbf{I}\right] \mapsto \left[\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{L}}\right]$ a máme upraveno $k-1$ sloupců. Pak

$$\mathbf{A}_{k-1} = \begin{bmatrix} a_{1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{k,k}^{k-1} \\ a_{k+1,k}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{n,k}^{k-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{\widetilde{\mathbf{L}}_k} \begin{bmatrix} a_{1,k}^{k} \\ \vdots \\ a_{k,k}^{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \widetilde{\mathbf{L}}_k = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \dots & -l_{k+1,k} & 1 & \dots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ 0 & \dots & -l_{n,k} & 0 & \dots 1 \end{bmatrix}$$

kde $l_{i,k} = a_{i,k}^{k-1}/a_{k,k}^{k-1}, i = k+1, \dots, n$.

4.4 Výpočet LU rozkladu

Po $n-1$ úpravách obdržíme $\mathbf{U} = \widetilde{\mathbf{L}}\mathbf{A}$, kde $\widetilde{\mathbf{L}} = \widetilde{\mathbf{L}}_{n-1}\cdots\widetilde{\mathbf{L}}_1$. Pro hledanou matici **L** ovšem platí

$$\mathbf{L} = \widetilde{\mathbf{L}}^{-1} = \widetilde{\mathbf{L}}_1^{-1}\cdots\widetilde{\mathbf{L}}_{n-1}^{-1}.$$

Pak se dá snadno dokázat, že

$$\widetilde{\mathbf{L}}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0\dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0\dots 0 \\ 0 & \dots & l_{k+1,k} & 1\dots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ 0 & \dots & l_{n,k} & 0\dots 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{k,1} & \dots & 1 & 0 & \dots 0 \\ l_{k+1,1} & \dots & l_{k+1,k} & 1 & \dots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{n,k} & l_{n,k+1} & \dots 1 \end{bmatrix}$$

Případné výměny sloupců se budou opět zaznamenávat do **I** čímž obdržíme permutační matici **P**.

4.4 Výpočet LU rozkladu

S použitím výše uvedených poznatků můžeme navrhnout algoritmus pro přímé nalezení LU rozkladu matice **A**:

Algoritmus

U = **A**, **L** = **I**

for $k = 1$ to $n - 1$ **do**

  for $i = k + 1$ to n **do**

    $l_{i,k} = u_{i,k}/u_{k,k}$

    $u_{i,k:n} = u_{i,k:n} - l_{i,k}u_{k,k:n}$

  end for

end for

4.5 Řešení soustav pomocí LU rozkladu

Přenásobíme-li $\mathbf{AP} = \mathbf{LU}$ zprava maticí $\widetilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P}^\top$, dostaneme vyjádření **A** ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}\widetilde{\mathbf{P}}$$

s permutační maticí $\widetilde{\mathbf{P}}$.

Místo soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pak budeme řešit soustavu

$$\mathbf{L}\Big(\mathbf{U}\big(\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x}\big)\Big) = \mathbf{b}$$

tak, že postupně vyřešíme

1. $\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$ tzv. dopřednou substitucí
2. $\mathbf{Uy} = \mathbf{z}$ tzv. zpětnou substitucí
3. $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ permutací složek řešení.

4.5 Řešení soustav pomocí LU rozkladu

PŘÍKLAD 4 Využijte LU rozkladu z příkladu 3 k řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 1 \end{array}$$

ŘEŠENÍ: Nejprve řešíme soustavu $\mathbf{Lz} = \mathbf{b}$, tedy

$$\begin{array}{rcrcrcl} z_1 & & & & & = & 1 \\ -\frac{1}{2}z_1 & + & \frac{1}{2}z_2 & & & = & 1 \\ & - & \frac{1}{3}z_2 & + & \frac{1}{3}z_3 & = & 1 \end{array}$$

odkud $z_1 = 1, z_2 = 3, z_3 = 6$. Potom vyřešíme soustavu $\mathbf{Uy} = \mathbf{z}$, tedy

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2y_1 & - & y_2 & & & = & 1 \\ & & 3y_2 & - & 2y_3 & = & 3 \\ & & & & 4y_3 & = & 6 \end{array}$$

Odtud $y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 2, y_3 = \frac{3}{2}$.

Konečně určíme $\mathbf{x}$ řešením $\widetilde{\mathbf{P}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nebo z $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$, takže

$x_1 = \frac{3}{2}$,$x_2 = 2$,$x_3 = \frac{3}{2}$.

4.6 Použití LU rozkladu

- LU rozklad je základním prostředkem pro řešení soustav lineárních rovnic
- Výpočetní náročnost je řádově stejná jako u Gaussovy eliminace, tj. $\approx \frac{1}{3}n^3$
- LU rozklad je velmi efektivní nástroj pro řešení soustav s více pravými stranami (pro různé pravé strany stačí pouze řešit dopřednou a zpětnou substituci)
- LU rozkladu je možné využít i k nalezení inverzní matice neboť

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}\widetilde{\mathbf{P}} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$$

- LU rozklad je taktéž velmi důležitý teoretický nástroj